

Redes y Sistemas Complejos



Cristian Candia, Ph.D.

Universidad del Desarrollo (UDD), Chile

Director at the Computational Research in Social Sciences Lab

Associate Professor, Data Science Institute, School of Engineering

Northwestern University, United States.

External Faculty, Northwestern Institute on Complex Systems (NICO)

Kellogg School of Management.

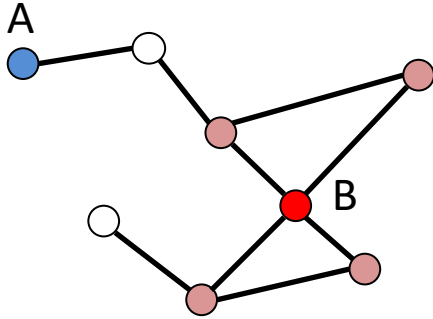
Capybara Spa (AI & Network Science for Preventive, Traceable School Coexistence Compliance)

Founder & Chief Scientific and Technological Officer (CSTO)

Grado, Grado promedio y Distribución de grado

GRADOS DE NODOS

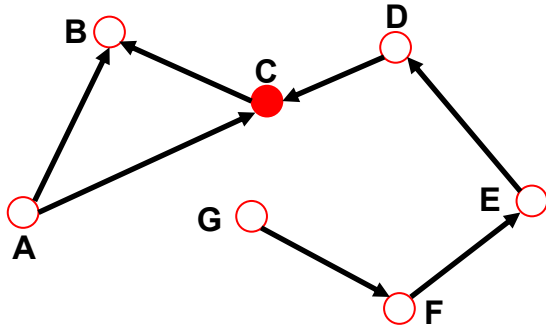
No-dirigido



Grado del nodo: el número de links conectados al nodo.

$$k_A = 1 \quad k_B = 4$$

Dirigido



En **redes dirigidas** Podemos definir un grado de entrada (in-degree) y un grado de salida (out-degree). El grado total es la suma de ambos.

$$k_C^{in} = 2 \quad k_C^{out} = 1 \quad k_C = 3$$

Fuente: un nodo con $k^{in} = 0$; **Sumidero**: un nodo con $k^{out} = 0$.

UN POCO DE ESTADISTICAS

Breve revisión estadística

Four key quantities characterize a sample of N values x_1, \dots, x_N :

Promedio:

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

El n-esimo momento:

$$\langle x^n \rangle = \frac{x_1^n + x_2^n + \dots + x_N^n}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^n$$

Desviación estándar

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2}$$

Distribución de x

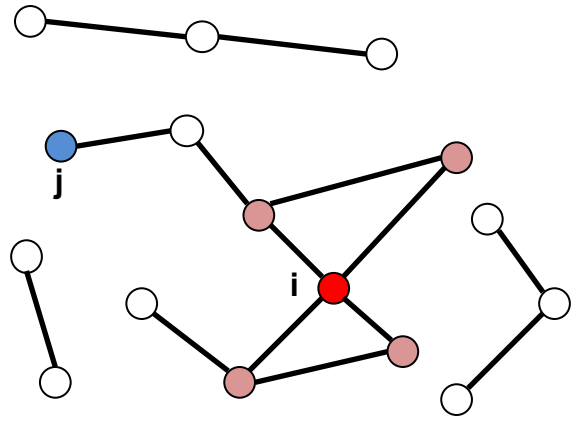
$$p_x = \frac{1}{N} \sum_i \delta_{x, x_i}$$

Donde x sigue:

$$\sum_i p_x = 1 \quad \left(\int p_x dx = 1 \right)$$

GRADO PROMEDIO

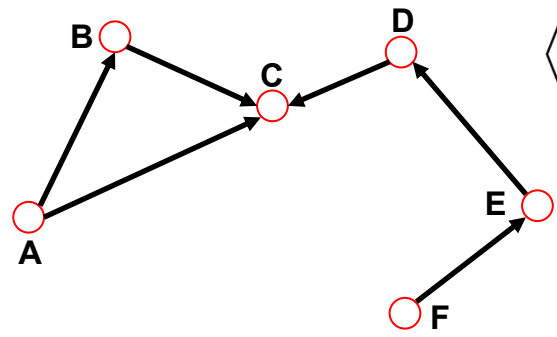
No-dirigido



$$\langle k \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i \quad \langle k \rangle \equiv \frac{2L}{N}$$

N – el número de nodos en el grafo

Dirigido



$$\langle k^{in} \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i^{in}, \quad \langle k^{out} \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i^{out}, \quad \langle k^{in} \rangle = \langle k^{out} \rangle$$

$$\langle k \rangle \equiv \frac{L}{N}$$

GRADO PROMEDIO

NETWORK	NODES	LINKS	DIRECTED UNDIRECTED	N	L	(k)
Internet	Routers	Internet connections	Undirected	192,244	609,066	6.33
WWW	Webpages	Links	Directed	325,729	1,497,134	4.60
Power Grid	Power plants, transformers	Cables	Undirected	4,941	6,594	2.67
Mobile Phone Calls	Subscribers	Calls	Directed	36,595	91,826	2.51
Email	Email addresses	Emails	Directed	57,194	103,731	1.81
Science Collaboration	Scientists	Co-authorship	Undirected	23,133	93,439	8.08
Actor Network	Actors	Co-acting	Undirected	702,388	29,397,908	83.71
Citation Network	Paper	Citations	Directed	449,673	4,689,479	10.43
E. Coli Metabolism	Metabolites	Chemical reactions	Directed	1,039	5,802	5.58
Protein Interactions	Proteins	Binding interactions	Undirected	2,018	2,930	2.90

DISTRIBUCION DE GRADO

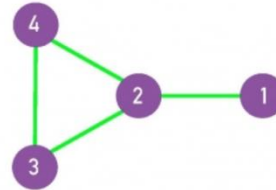
Distribución de grado

$P(k)$: probabilidad de que un nodo elegido aleatoriamente tenga grado k

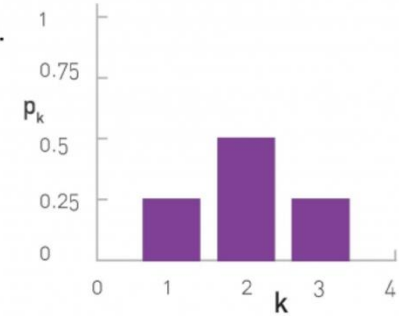
$N_k = \#$ nodos con grado k

$P(k) = N_k / N \rightarrow$ plot

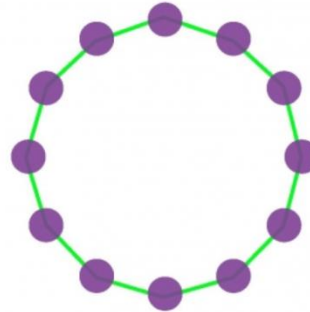
a.



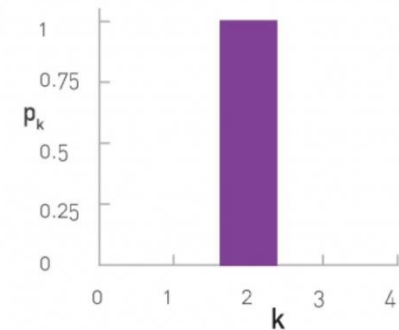
b.



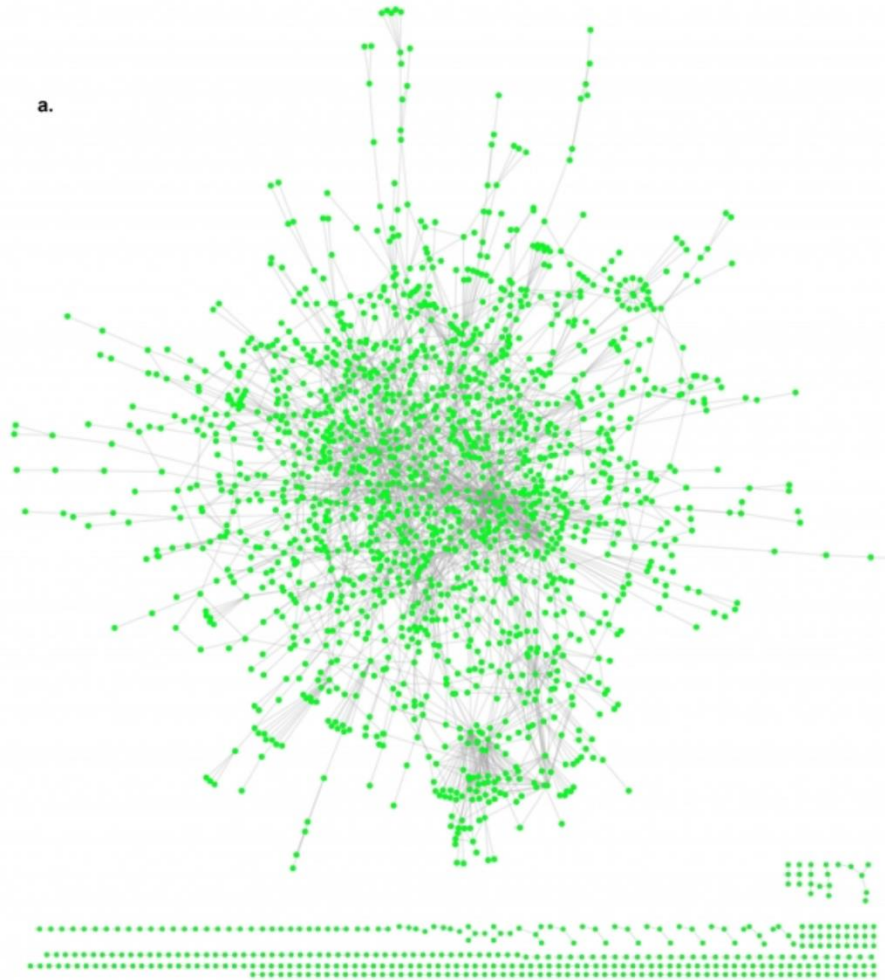
c.



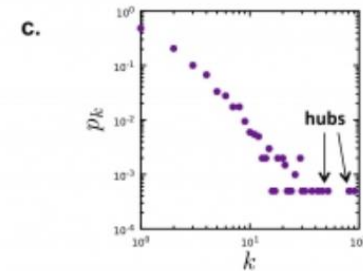
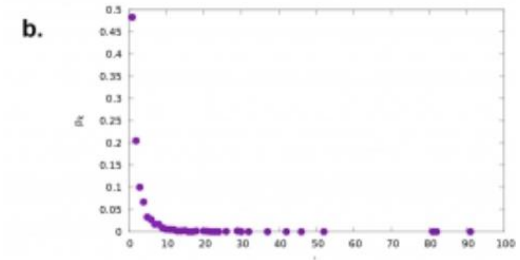
d.



DISTRIBUCION DE GRADO



En muchas redes reales, el grado de nodo puede variar considerablemente. Por ejemplo, como indica la distribución de grados (a), los grados de las proteínas en la red de interacción de proteínas que se muestran en (b) varían entre $k = 0$ (nodos aislados) y $k = 92$, que es el grado del nodo más grande, llamado un centro. También hay grandes diferencias en el número de nodos con diferentes grados: como muestra (a), casi la mitad de los nodos tienen grado uno (es decir, $p_1 = 0,48$), mientras que solo hay una copia del nodo más grande, por lo tanto, $p_{92} = 1 / N = 0.0005$. (c) La distribución de grados a menudo se muestra en el llamado gráfico log-log, en el que trazamos $\log p_k$ en función de $\log k$, o, como hicimos en (c), usamos ejes logarítmicos.



DISTRIBUCION DE GRADO

Representación discreta: p_k Es la probabilidad de que un nodo tenga grado k .

Descripción continua: $p(k)$ es la pdf de los grados, donde

$$\int_{k_1}^{k_2} p(k) dk$$

representa la probabilidad de que el grado de un nodo esté entre k_1 y k_2 .

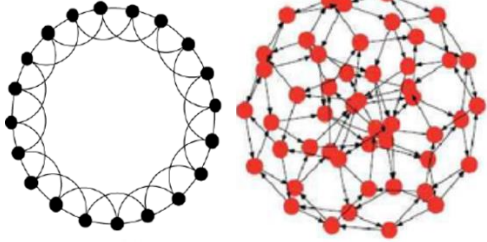
Condición de normalización:

$$\sum_0^{\infty} p_k = 1 \qquad \int_{K_{\min}}^{\infty} p(k) dk = 1$$

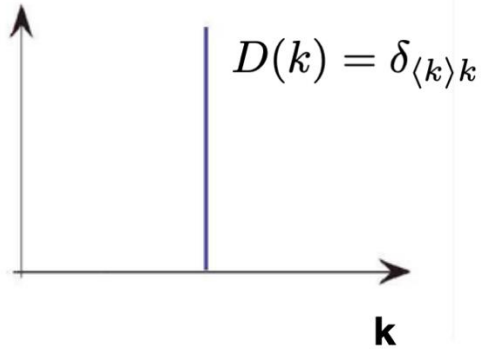
donde K_{\min} es el mínimo grado de la red.

DISTRIBUCION DE GRADO

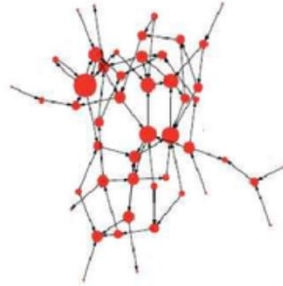
Regular



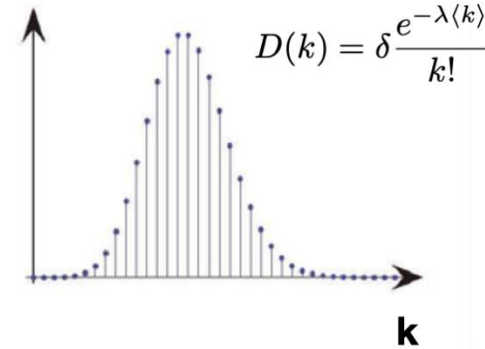
$D(k)$



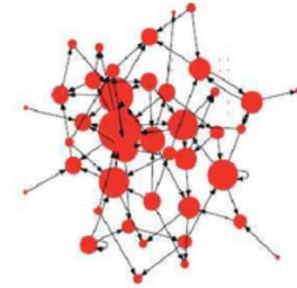
Random



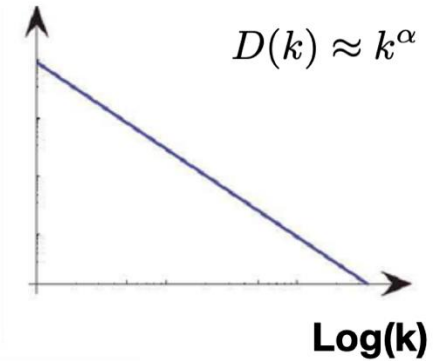
$D(k)$



Scale Free

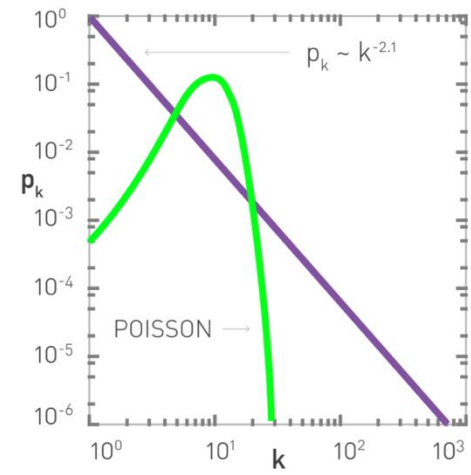
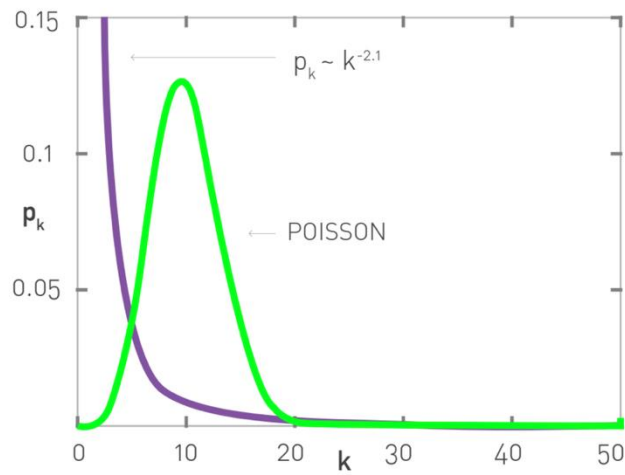


$\text{Log}(D(k))$

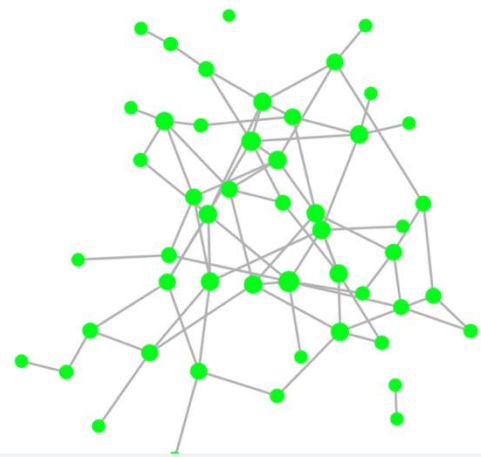


Piensen en los histogramas de frecuencias de grado
¿Cómo se comparan los promedios con los valores máximos?

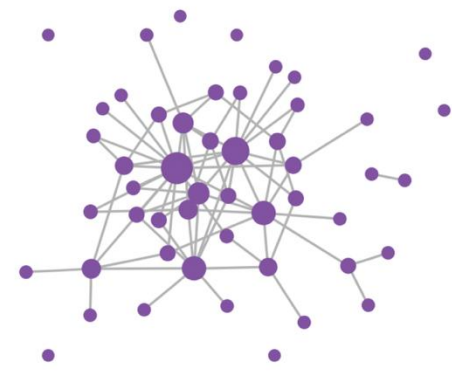
Diferencia entre red aleatoria y libre de escala



(c)

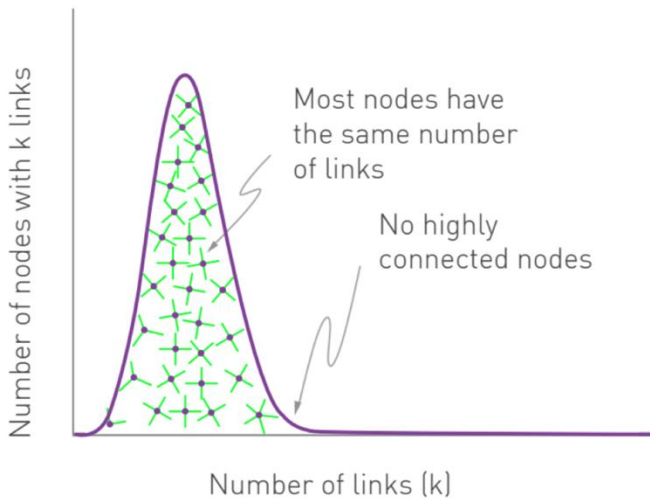


(d)

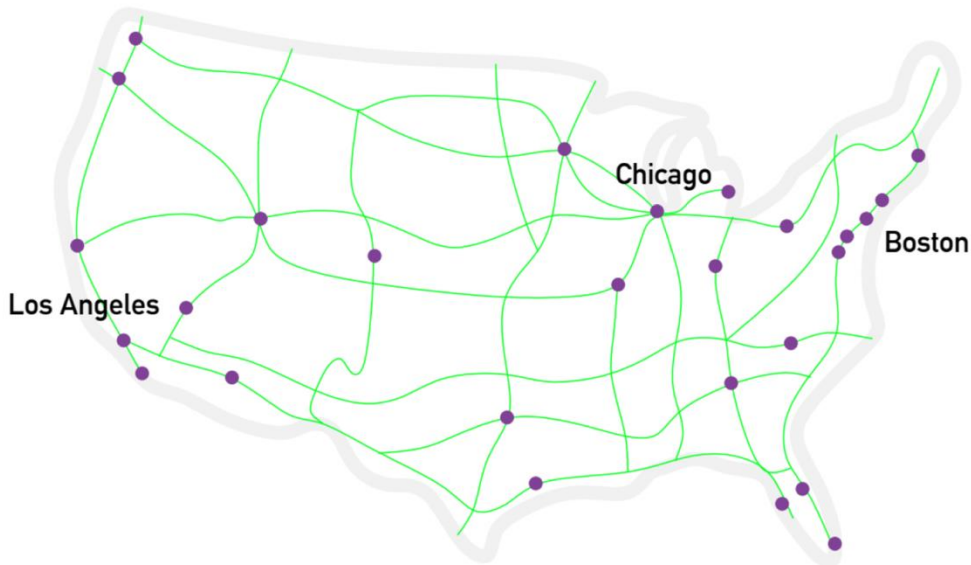


Diferencia entre red aleatoria y libre de escala

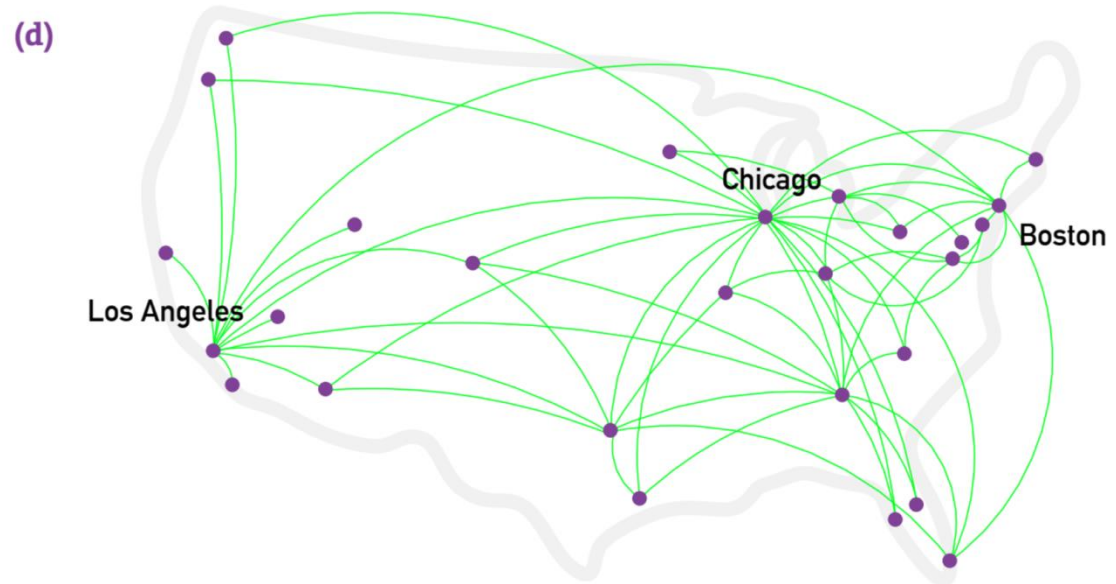
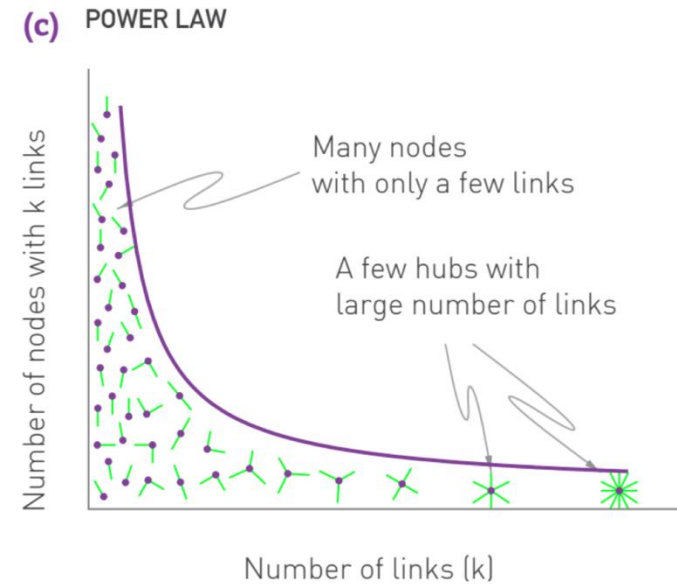
(a) POISSON



(b)



Diferencia entre red aleatoria y libre de escala



Estas estructuras tienen un impacto significativo en cómo se propaga la información en los sistemas físicos, biológicos, sociales, etc.

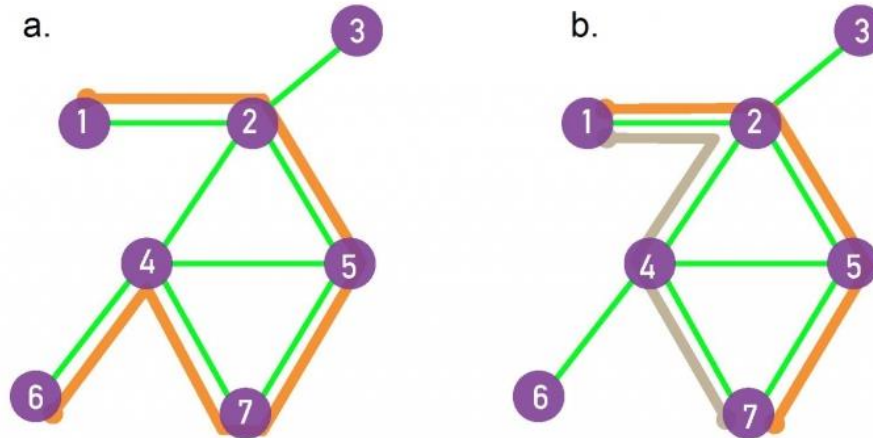
Topología

CAMINOS

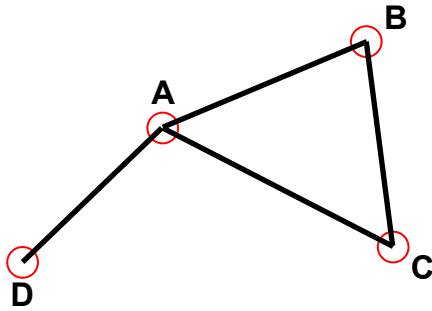
Un camino (*path*) es una secuencia de nodos en los que cada nodo es adyacente al siguiente

P_{i_0, i_n} de longitud n entre los nodos i_0 y i_n es una colección ordenada de $n+1$ nodos y n links

$$P_n = \{i_0, i_1, i_2, \dots, i_n\} \quad P_n = \{(i_0, i_1), (i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{n-1}, i_n)\}$$

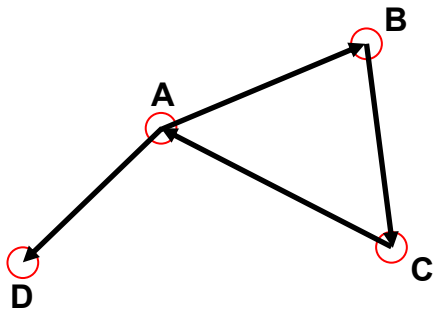


- En una red dirigida, la ruta solo puede seguir la dirección de una flecha.



La distancia (ruta más corta, ruta geodésica) entre dos nodos se define como el número de enlaces a lo largo de la ruta más corta que los conecta.

* Si los dos nodos están desconectados, la distancia es infinita.



En los grafos dirigidos, cada ruta debe seguir la dirección de las flechas.

Así, en un grafo, la distancia desde el nodo A hasta B (en una ruta AB) es generalmente diferente de la distancia desde el nodo B hasta A (en una ruta BCA).

N_{ij} , número de caminos entre dos nodos i y j :

Longitud $n=1$: Si existe un link entre i y j , entonces $A_{ij}=1$ y $A_{ij}=0$ en otro caso.

Longitud $n=2$: Si existe un camino de longitud dos entre i y j , entonces $A_{ik}A_{kj}=1$, y $A_{ik}A_{kj}=0$ en otro caso.

El número de caminos de longitud 2 es:

$$N_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^N A_{ik}A_{kj} = [A^2]_{ij}$$

Longitud n : en general, si existe un camino de longitud n entre i y j , entonces $A_{ik}\dots A_{lj}=1$ y $A_{ik}\dots A_{lj}=0$ en otro caso.

El número de caminos de longitud n entre i y j es*

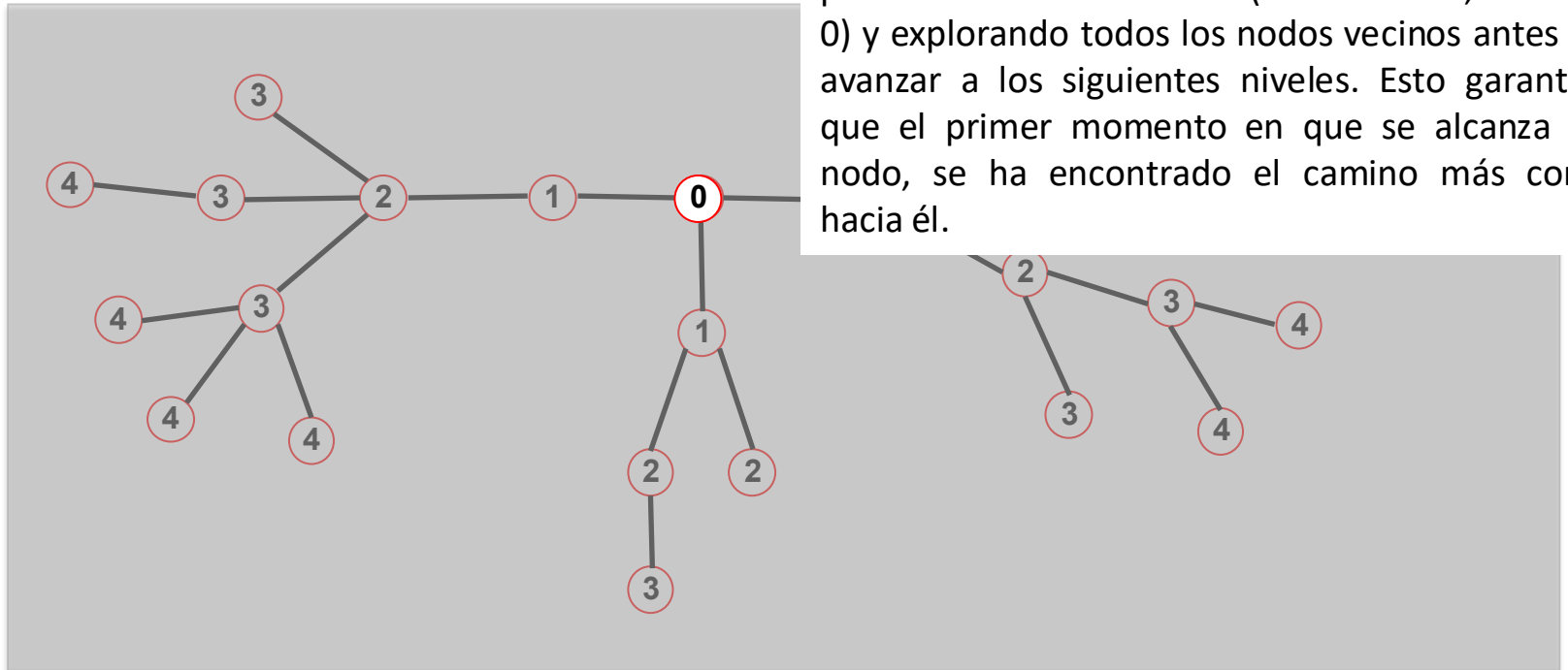
$$N_{ij}^{(n)} = [A^n]_{ij}$$

* Se aplica tanto a redes dirigidas como no dirigidas.

ECONTRANDO DISTANCIAS: “BREADTH FIRST SEARCH”

La distancia entre el nodo 0 y nodo 4:

1. Comienza en 0.

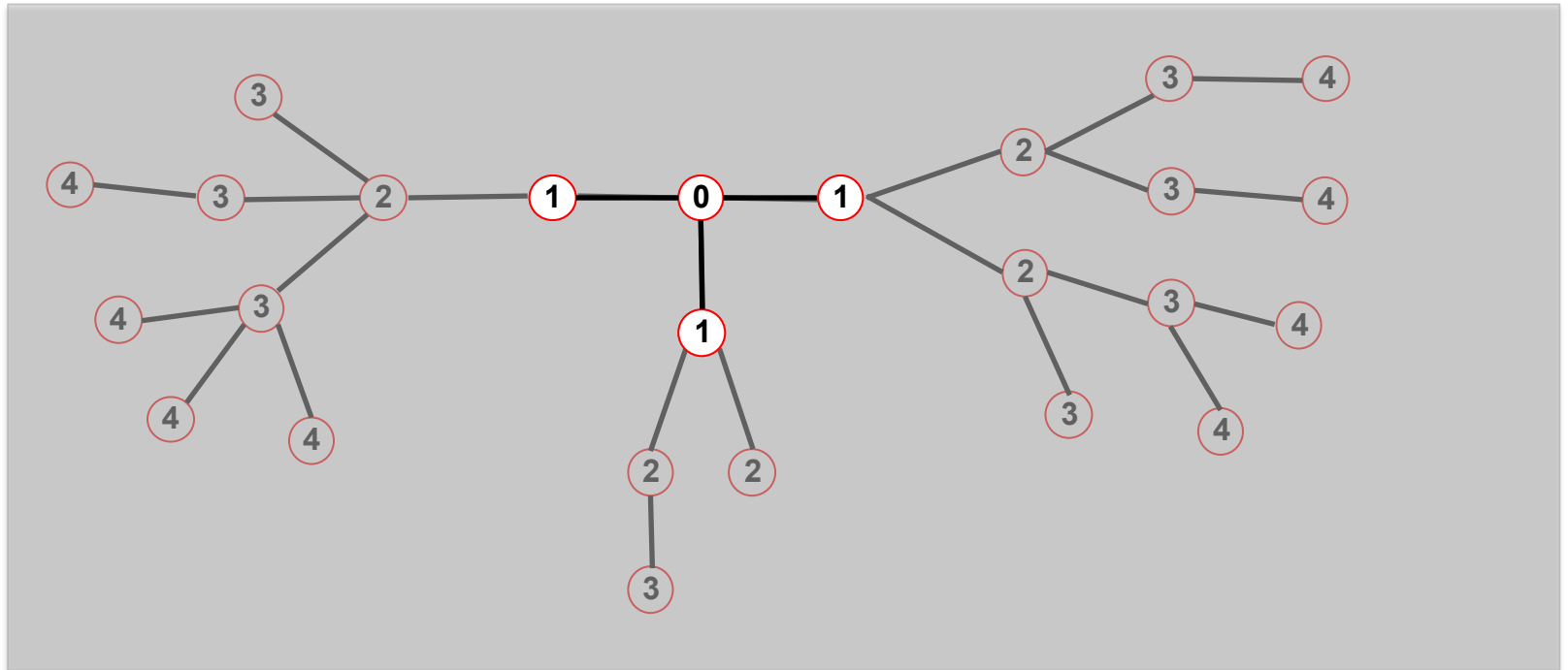


El algoritmo **Breadth First Search (BFS)** o **Búsqueda en Anchura**, una técnica fundamental en teoría de grafos para **encontrar distancias mínimas entre nodos** en una red no ponderada. La idea es recorrer el grafo **nivel por nivel**, partiendo del nodo inicial (en este caso, el nodo 0) y explorando todos los nodos vecinos antes de avanzar a los siguientes niveles. Esto garantiza que el primer momento en que se alcanza un nodo, se ha encontrado el camino más corto hacia él.

ECONTRANDO DISTANCIAS: “BREADTH FIRST SEARCH”

La distancia entre el nodo 0 y nodo 4:

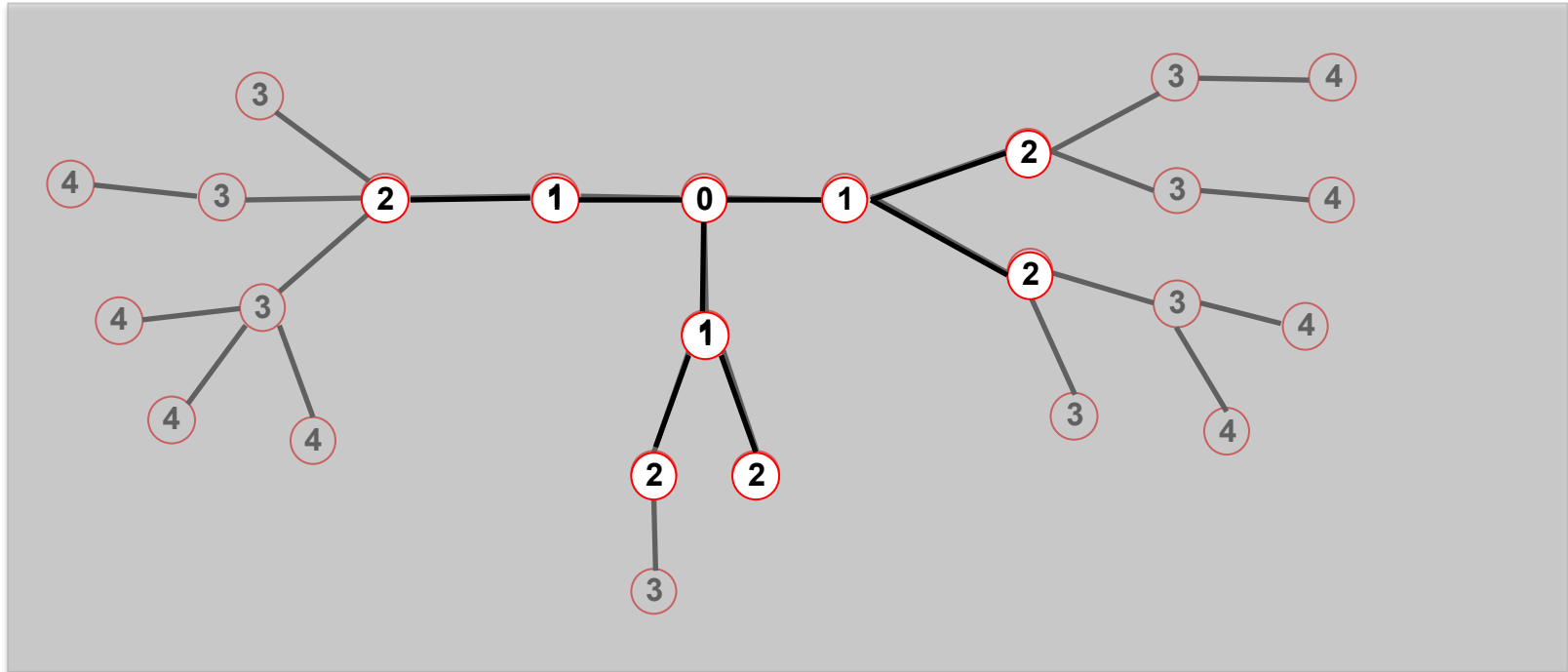
1. Comienza en 0.
2. Encuentra los nodos adyacentes a 0. Márcalos con la etiqueta 1. Ponlos en una fila.



ECONTRANDO DISTANCIAS: “BREADTH FIRST SEARCH”

La distancia entre el nodo 0 y nodo 4:

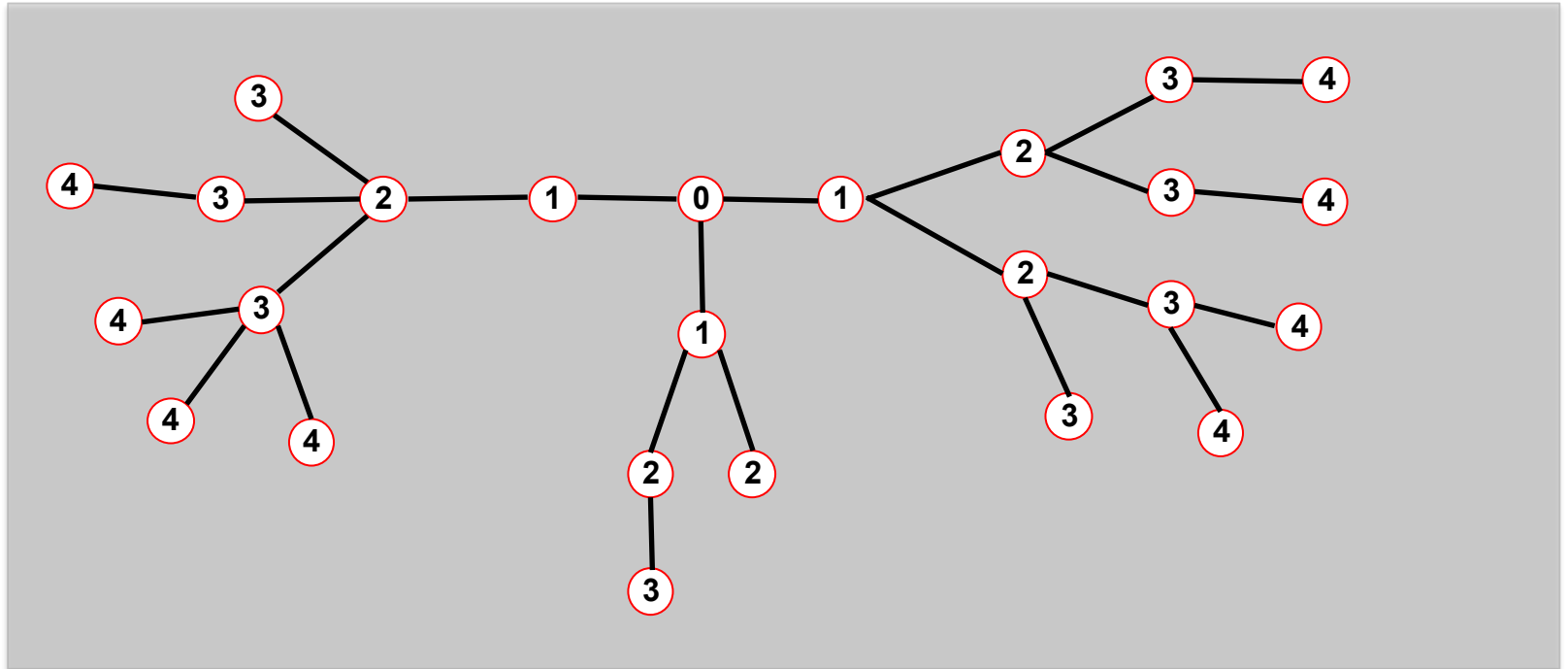
1. Comienza en 0.
2. Encuentra los nodos adyacentes a 1. Márcalos con la etiqueta 1. Pon los en una fila.
3. Toma el primer nodo de la fila. Encuentra los nodos no-marcados adyacentes en el grafo. Márcalos con la etiqueta 2. Ponlos en la fila.



ECONTRANDO DISTANCIAS: “BREADTH FIRST SEARCH”

La distancia entre el nodo 0 y nodo 4:

1. Repite hasta que encuentres el nodo 4 o no hayan mas nodos en la fila.
2. La distancia entre 0 y 4 es la etiqueta 4 o, si 4 no tiene una etiqueta, infinito.



ECONTRANDO DISTANCIAS: “BFS, DFS y Dijkstra”

BFS (Breadth-First Search)

- Explora la red por niveles: primero los vecinos cercanos, luego los de distancia 2, 3, etc.
- En grafos no ponderados, encuentra el camino más corto en número de pasos.
- Usa una lógica tipo cola, explora vecinos en orden de llegada.

DFS (Depth-First Search)

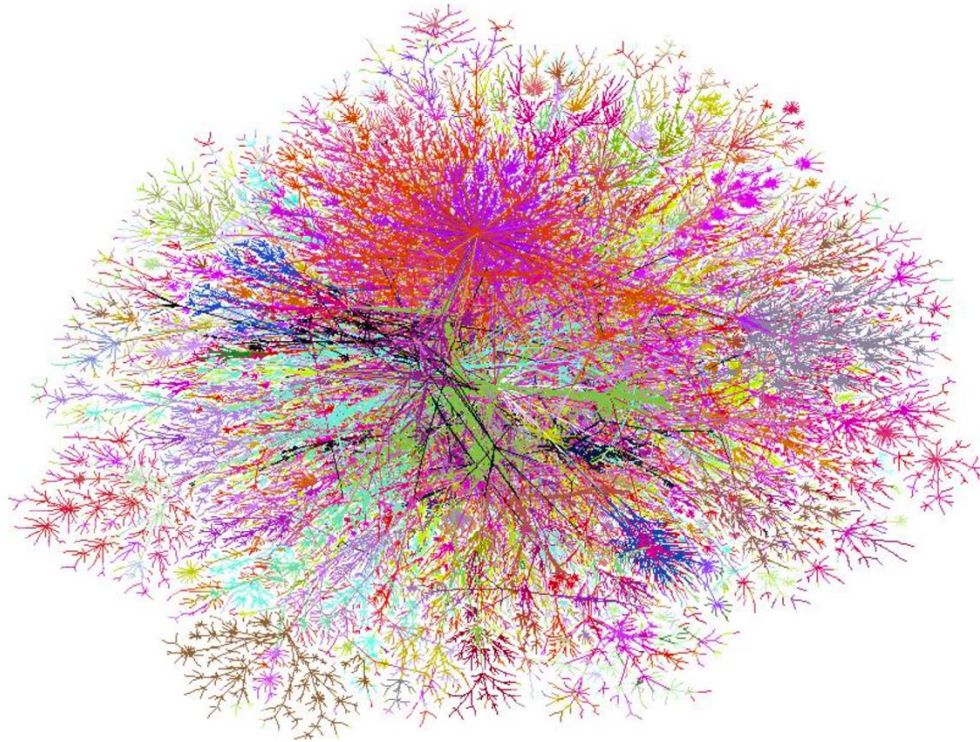
- Explora lo más profundo posible antes de retroceder.
- Sirve para recorrer, detectar componentes, ciclos o estructura.
- No garantiza el camino más corto.
- Usa una lógica tipo pila o recursión, explora el último camino Abierto.

Dijkstra

- Encuentra el camino de costo mínimo desde un nodo origen.
- Se usa en grafos ponderados con pesos positivos.
- Generaliza la idea de “ruta más corta” cuando las aristas tienen costos distintos.

- BFS: mejor si todas las conexiones “cuestan lo mismo”.
- DFS: mejor para explorar estructura.
- Dijkstra: mejor si cada enlace tiene un peso o costo distinto.

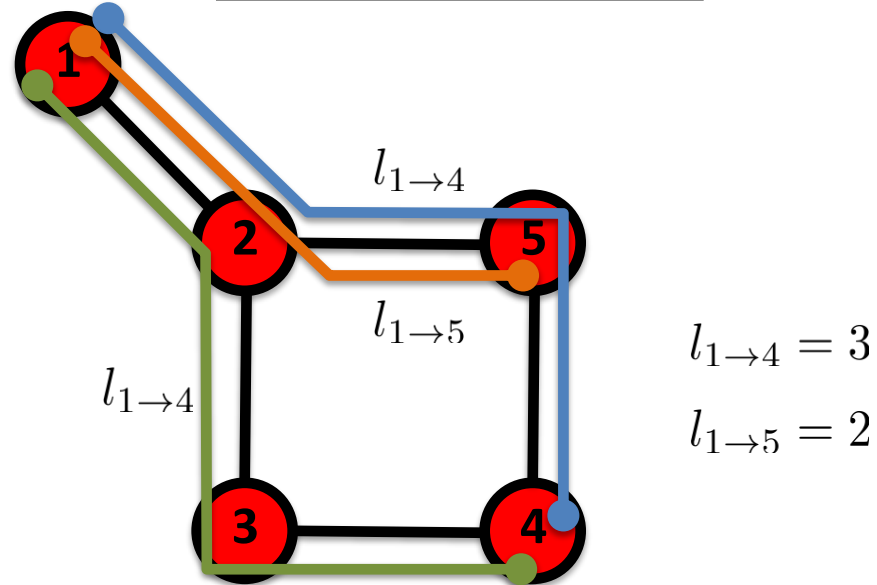
Las redes son una representación matemática del mundo real



H. Burch and B. Cheswick

DISTANCIA EN UNA RED: CAMINO MÁS CORTO

Camino más corto:



El camino con la longitud más corta entre dos nodos (distancia).

DIÁMETRO DE RED Y DISTANCIA MEDIA

Diámetro: d_{max} La distancia máxima entre cualquier par de nodos en el grafo.

Longitud / distancia media del camino, $\langle d \rangle$, para un grafo conectado y dirigido:

$$\langle d \rangle \equiv \frac{1}{2L_{max}} \sum_{i, j \neq i} d_{ij} \qquad \langle d \rangle = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} d_{ij}$$

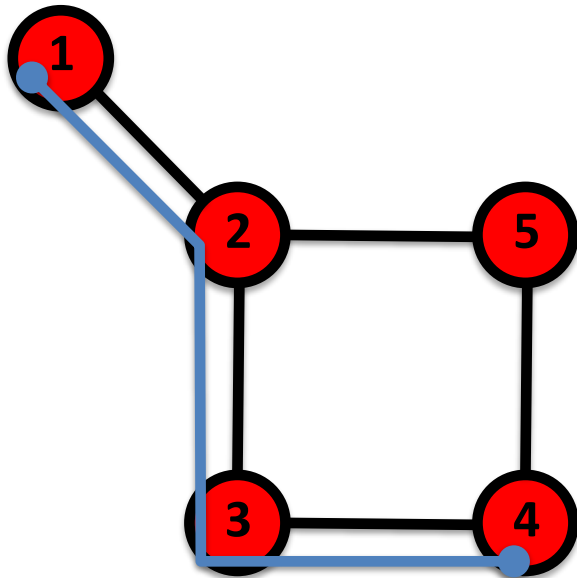
dónde d_{ij} es la distancia desde el nodo i al nodo j

En un grafo conectado y no-dirigido $d_{ij} = d_{ji}$, solo necesitamos contarlos una sola vez:

$$\langle d \rangle \equiv \frac{1}{L_{max}} \sum_{i, j > i} d_{ij} \qquad \langle d \rangle = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i < j} d_{ij}$$

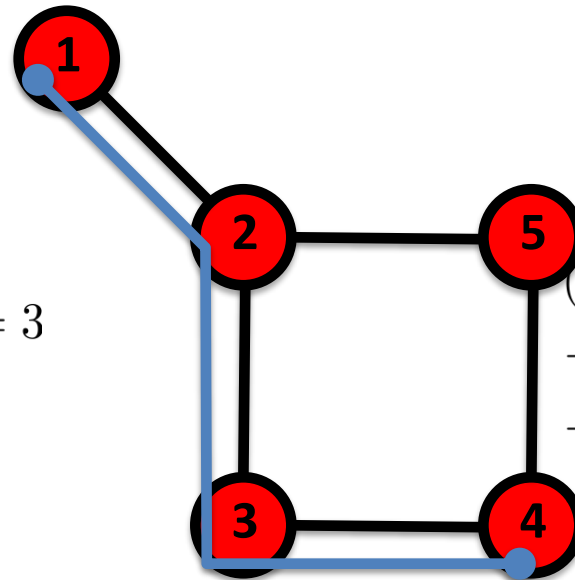
DIÁMETRO DE RED Y DISTANCIA MEDIA

Diámetro



La distancia más larga del grafo

Longitud de camino promedio



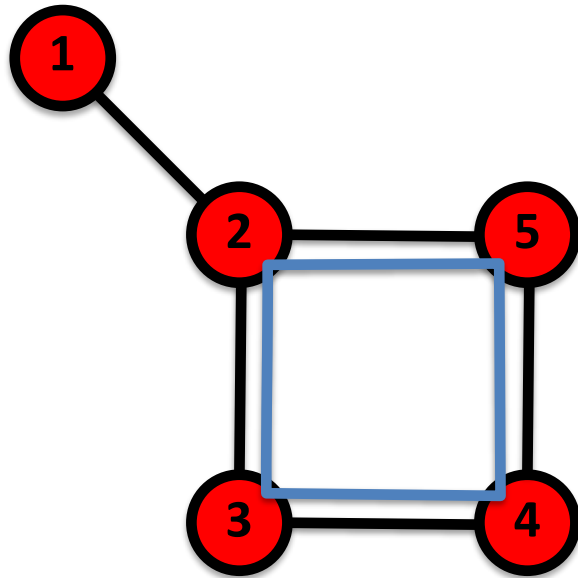
$$l_{1 \rightarrow 4} = 3$$

$$(l_{1 \rightarrow 2} + l_{1 \rightarrow 3} + l_{1 \rightarrow 4} + l_{1 \rightarrow 5} + l_{2 \rightarrow 3} + l_{2 \rightarrow 4} + l_{2 \rightarrow 5} + l_{3 \rightarrow 4} + l_{3 \rightarrow 5} + l_{4 \rightarrow 5}) / 10 = 1.6$$

El promedio de los caminos más cortos para todos los pares de nodos

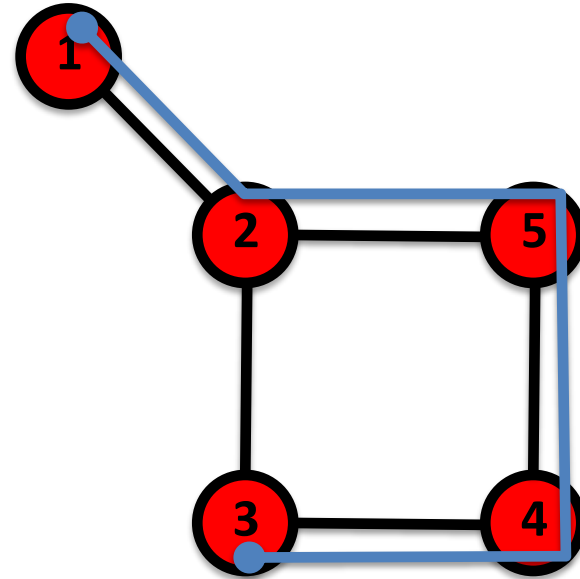
CAMINOS EN UNA RED

Ciclo



Una ruta con el mismo nodo de inicio y final.

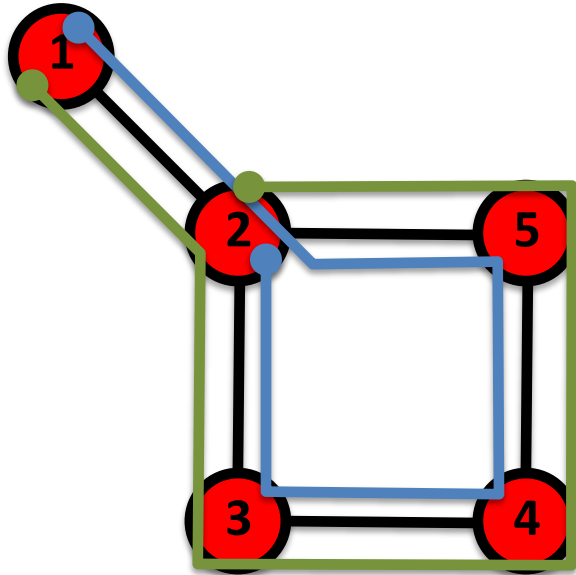
Camino de auto-evasión



Un camino que no se intersecta.

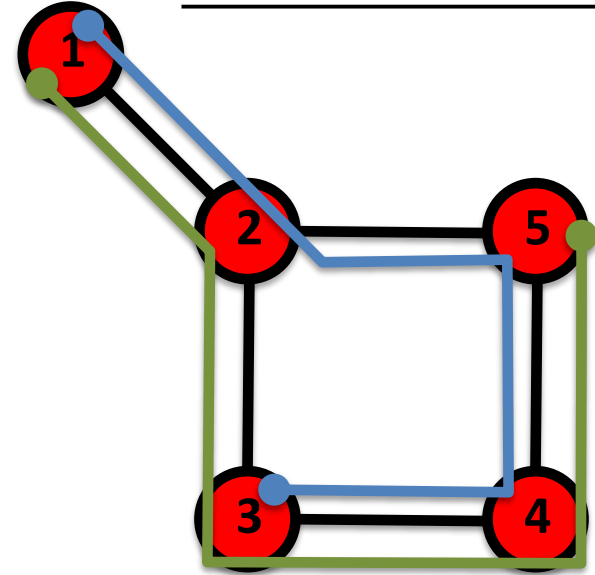
CAMINOS EN UNA RED

Camino Euleriano



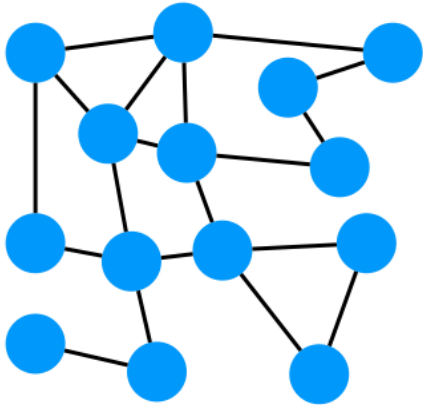
Un camino que atraviesa cada enlace exactamente una vez.

Camino Hamiltoniano



Una ruta que visita cada nodo exactamente una vez.

DISTANCIAS EN UNA RED

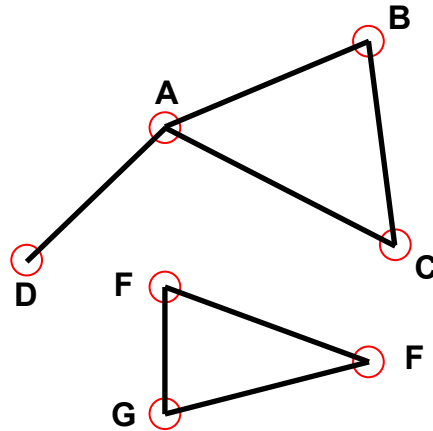
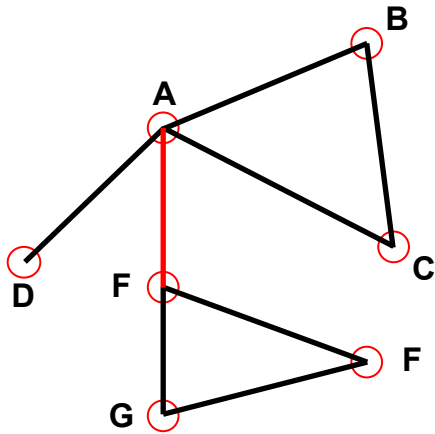


[**Importante**] La red proporciona una métrica natural para el sistema. Es decir, nos permite cuantificar distancias entre elementos.

Esto es particularmente importante ya que trataremos con sistemas en los que las distancias / similitudes de cálculo no son naturales y deben realizarse a través de un proxy (la red).

CONECTIVIDAD DE GRAFOS NO-DIRIGIDOS

Gráfico conectado (no dirigido): cualquiera de los dos vértices se puede unir por una ruta.
Un gráfico desconectado está compuesto por dos o más componentes conectados.

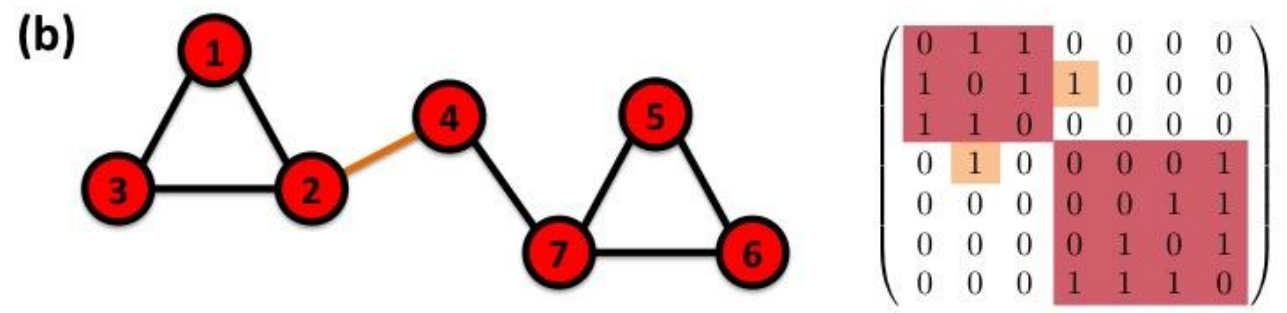
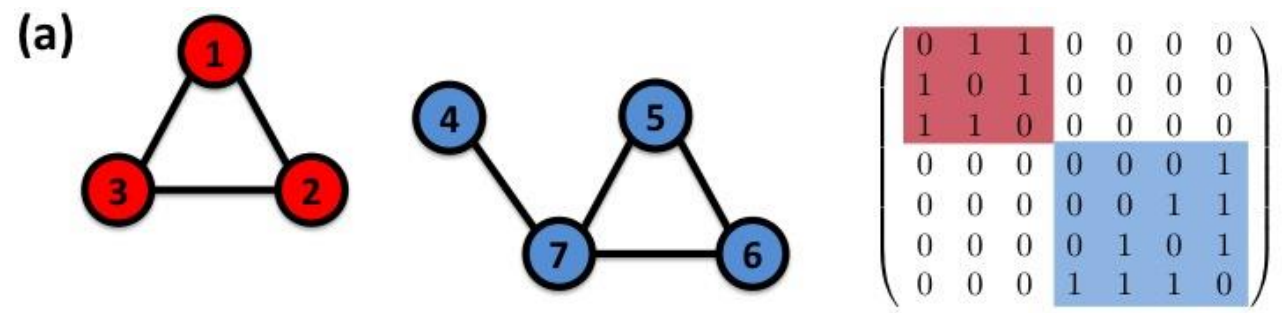


Componente más grande:
Componente gigante

El resto: **Aislados**

Puente: si lo borramos, la gráfica se desconecta.

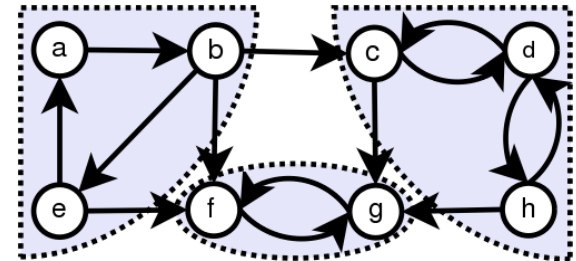
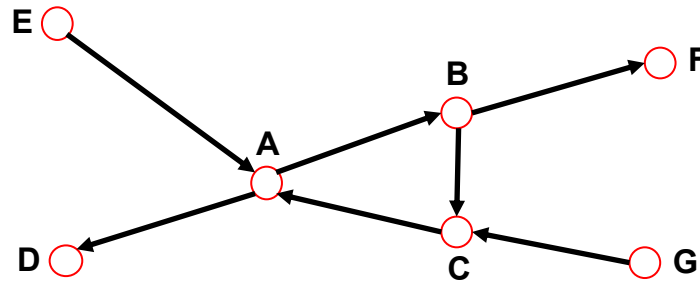
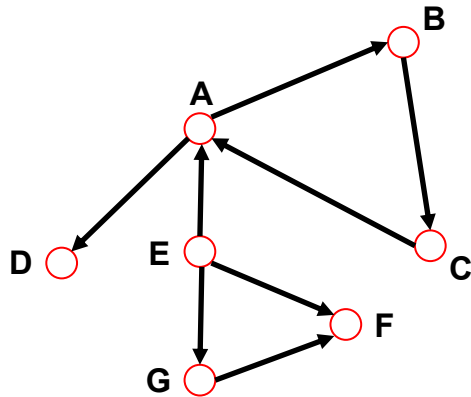
La matriz de adyacencia de una red con varios componentes se puede escribir en forma de diagonal de bloques, de modo que los elementos distintos de cero se limiten a los cuadrados, y todos los demás elementos sean cero:



CONECTIVIDAD DE GRAFOS DIRIGIDOS

Grafo dirigido fuertemente conectado: tiene una ruta desde cada nodo a todos los demás nodos **y viceversa** (por ejemplo, ruta AB y ruta BA).

Grafo dirigido débilmente conectada: está conectada si ignoramos el direcciones de los enlaces.



In-component: nodos que pueden alcanzar el scc (strongly connected component),

Out-component: Nodos a los que se puede acceder desde el scc.

Coeficiente de Agrupamiento

COEFICIENTE DE CLUSTERING

* Coeficiente de clustering:

¿Qué fracción de tus vecinos están conectados?

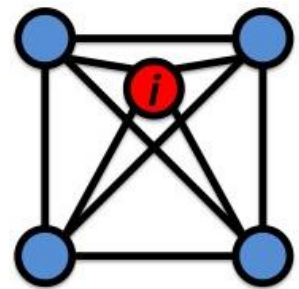
- * Nodo i con grado k_i
- * C_i entre $[0,1]$
- * e_i (links entre los vecinos del nodo i)

Dirigido

$$C_i = \frac{|\{e_{jk}\}|}{k_i(k_i - 1)} : v_j, v_k \in N_i, e_{jk} \in E.$$

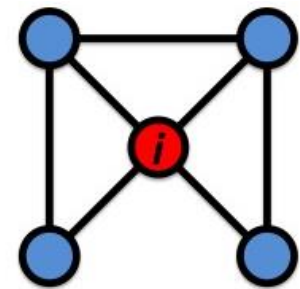
No-Dirigido

$$C_i = \frac{2|\{e_{jk}\}|}{k_i(k_i - 1)} : v_j, v_k \in N_i, e_{jk} \in E.$$



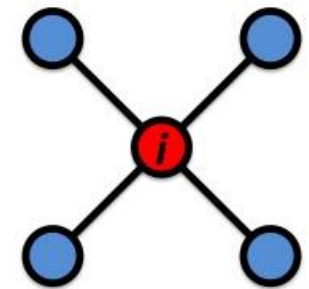
$$C_i = 1$$

$$2*6/(4*3)=1$$



$$C_i = 1/2$$

$$2*3/(4*3)=1/2$$



$$C_i = 0$$

Watts & Strogatz, Nature 1998.

COEFICIENTE DE CLUSTERING

* Coeficiente de clustering:

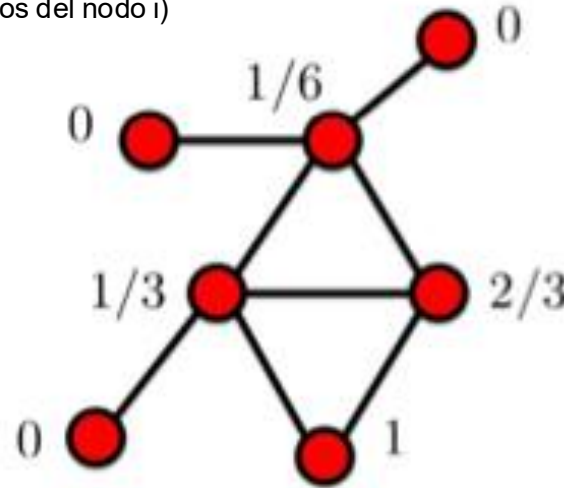
¿Qué fracción de tus vecinos están conectados?

- * Nodo i con grado k_i
- * C_i entre $[0,1]$
- * e_i (links entre los vecinos del nodo i)

$$C_i = \frac{1}{k_i(k_i - 1)} \sum_{j,k} A_{ij} A_{jk} A_{ki}$$

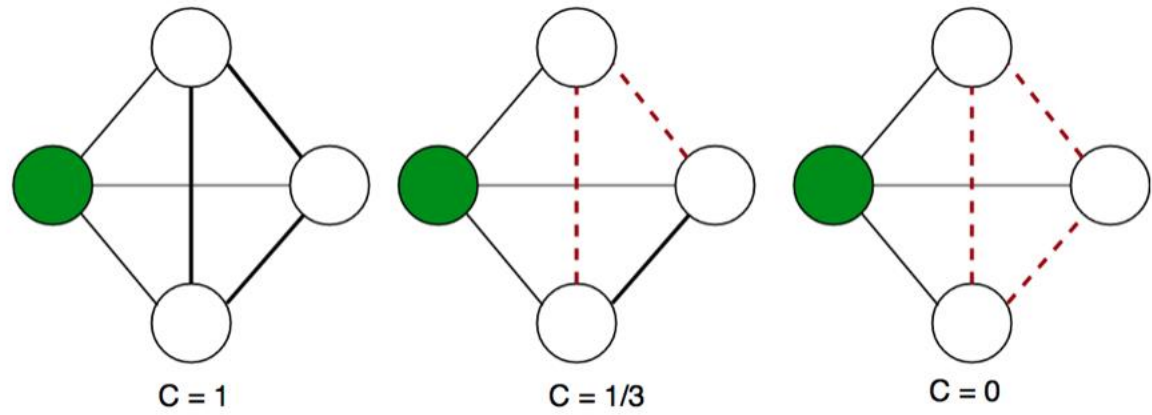
$$k_i = \sum_j A_{ij}$$

$$\bar{C} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i.$$



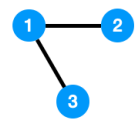
$$\langle C \rangle = \frac{13}{42} \approx 0.310$$

COEFICIENTE DE CLUSTERING

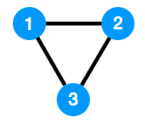


$$C = \frac{\text{number of closed triplets}}{\text{number of all triplets (open and closed)}}$$

Medición de la densidad de los enlaces
Enlaces Fuertes entre nodos.

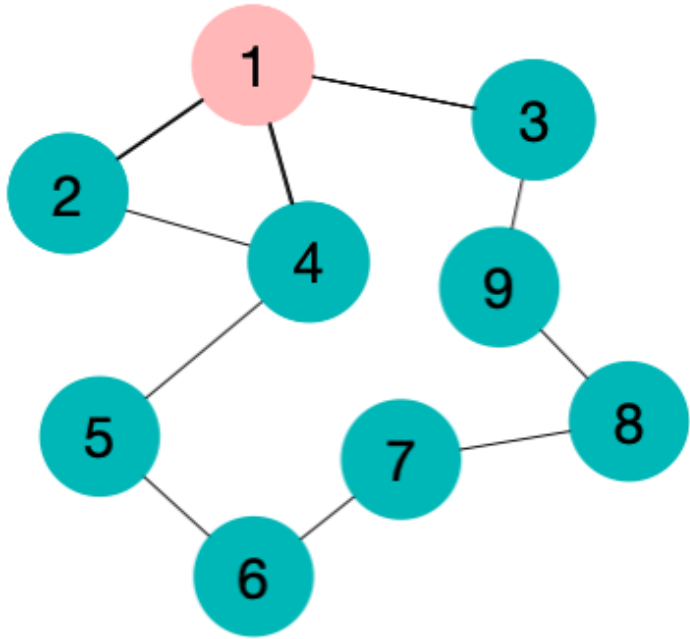


Open Triangle
(triplet)



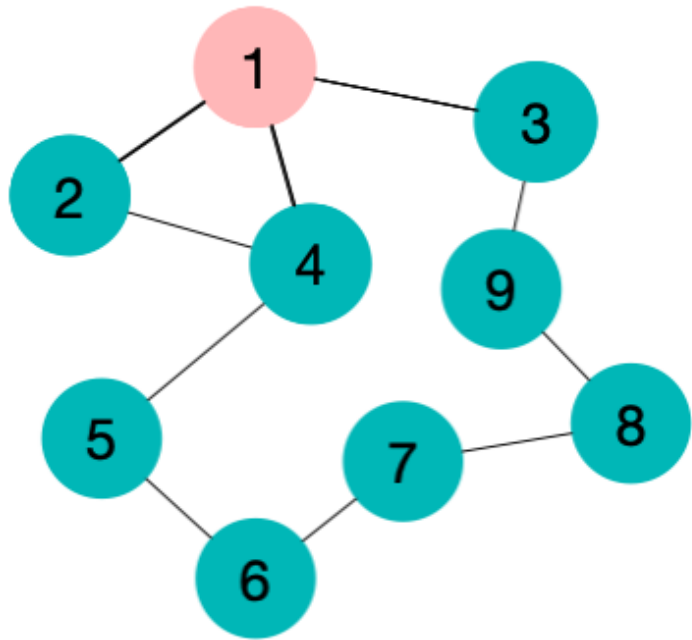
Closed Triangle
(closed triplet)

COEFICIENTE DE CLUSTERING

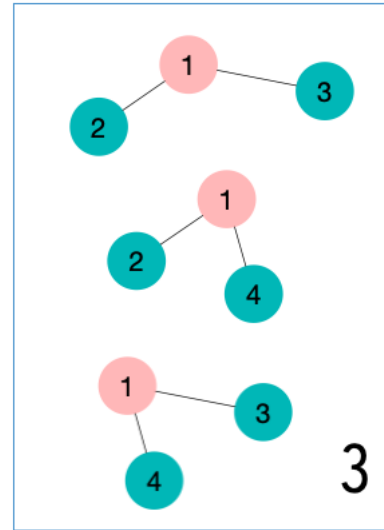


¿Cuál es el CC del nodo 1?

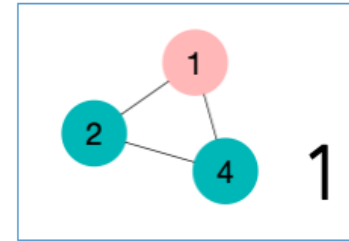
COEFICIENTE DE CLUSTERING



Tripletes



Triángulos Cerrados



Coeficiente de Clustering:

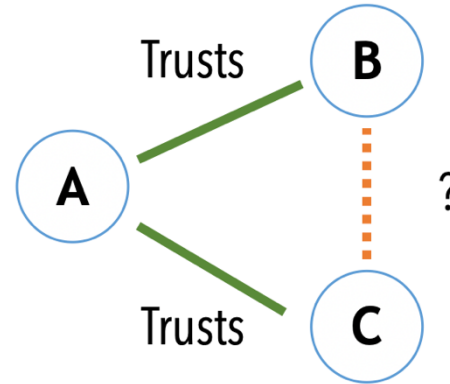
$$1/3=0.33$$

Strength of Weak Ties



Mark Granovetter

Triadic closure in Social Relationships



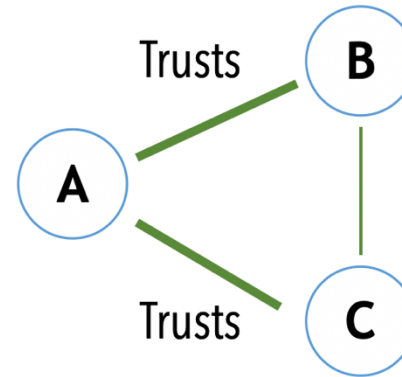
¿Podemos predecir vínculos entre individuos?
La idea de cierre triádico se vincula con la idea de Coeficiente de Clúster.

Strength of Weak Ties



Mark Granovetter

Cierre Triádico en las Relaciones Sociales



B y C deberían tener cierta confianza latente sobre la base de la relación con A

La primera premisa de la teoría es que cuanto más fuerte es el vínculo entre dos personas, más probable es que sus mundos sociales se superpongan.

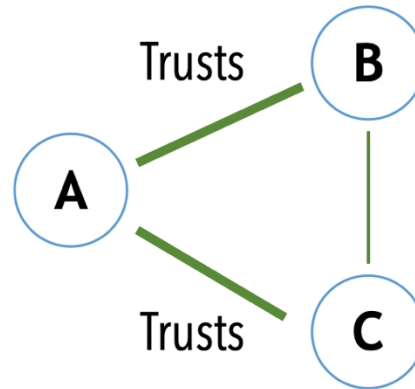
Las causas subyacentes de la formación de vínculos tienen este tipo de transitividad incorporada.

Strength of Weak Ties

Cierre Triádico en las Relaciones Sociales



Mark Granovetter



B y C deberían tener cierta confianza latente sobre la base de la relación con A

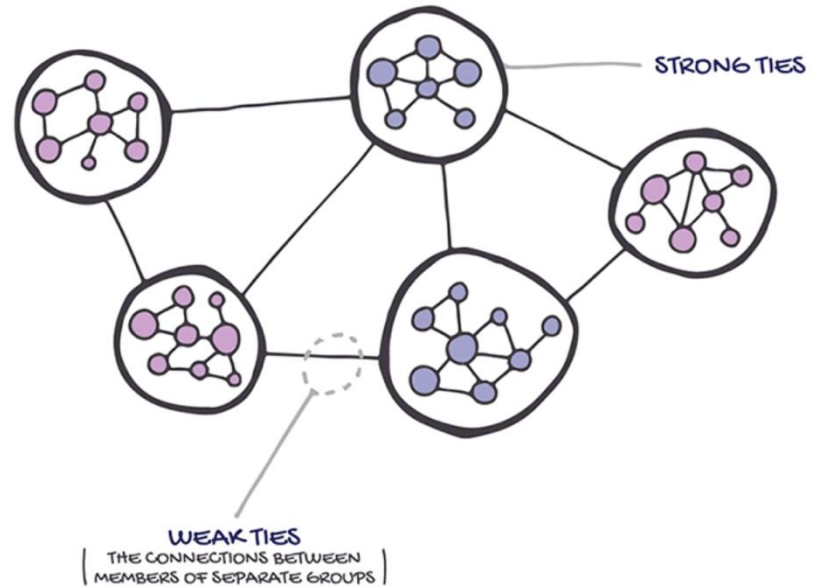
La segunda premisa de SWT es que los lazos de unión son una fuente potencial de ideas novedosas.

A través de un lazo puente, una persona puede escuchar cosas que aún no están circulando entre sus amigos cercanos.

Strength of Weak Ties



Mark Granovetter



Los lazos débiles son los responsables de la difusión de las innovaciones.

The Strength of Weak Ties¹

Mark S. Granovetter

Johns Hopkins University



Mark Granovetter

Analysis of social networks is suggested as a tool for linking micro and macro levels of sociological theory. The procedure is illustrated by elaboration of the macro implications of one aspect of small-scale interaction: the strength of dyadic ties. It is argued that the degree of overlap of two individuals' friendship networks varies directly with the strength of their tie to one another. The impact of this principle on diffusion of influence and information, mobility opportunity, and community organization is explored. Stress is laid on the cohesive power of weak ties. Most network models deal, implicitly, with strong ties, thus confining their applicability to small, well-defined groups. Emphasis on weak ties lends itself to discussion of relations *between* groups and to analysis of segments of social structure not easily defined in terms of primary groups.

Uno de los artículos más citados en Sociología.

Los conceptos expuestos en su obra seminal son fundamentales...

Altamente influyente en marketing, sistemas de información y política, ayudando a los investigadores a ofrecer productos que pueden llegar a audiencias poco probables.

The Strength of Weak Ties¹

Mark S. Granovetter

Johns Hopkins University



Mark Granovetter

Department of Sociology, [Stanford University](#).
Verified email at stanford.edu

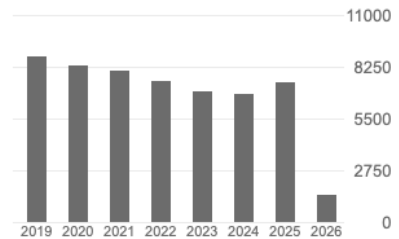
FOLLOW

TITLE	CITED BY	YEAR
The strength of weak ties MS Granovetter American journal of sociology, 1360-1380	79653	1973
Economic action and social structure: The problem of embeddedness M Granovetter American journal of sociology 91 (3), 481-510	56244	1985
The Strength of Weak Ties: A Network Theory Revisited M Granovetter Sociological Theory 1, 201-233	15755	1983

Cited by

[VIEW ALL](#)

	All	Since 2021
Citations	206976	38409
h-index	65	34
i10-index	121	64

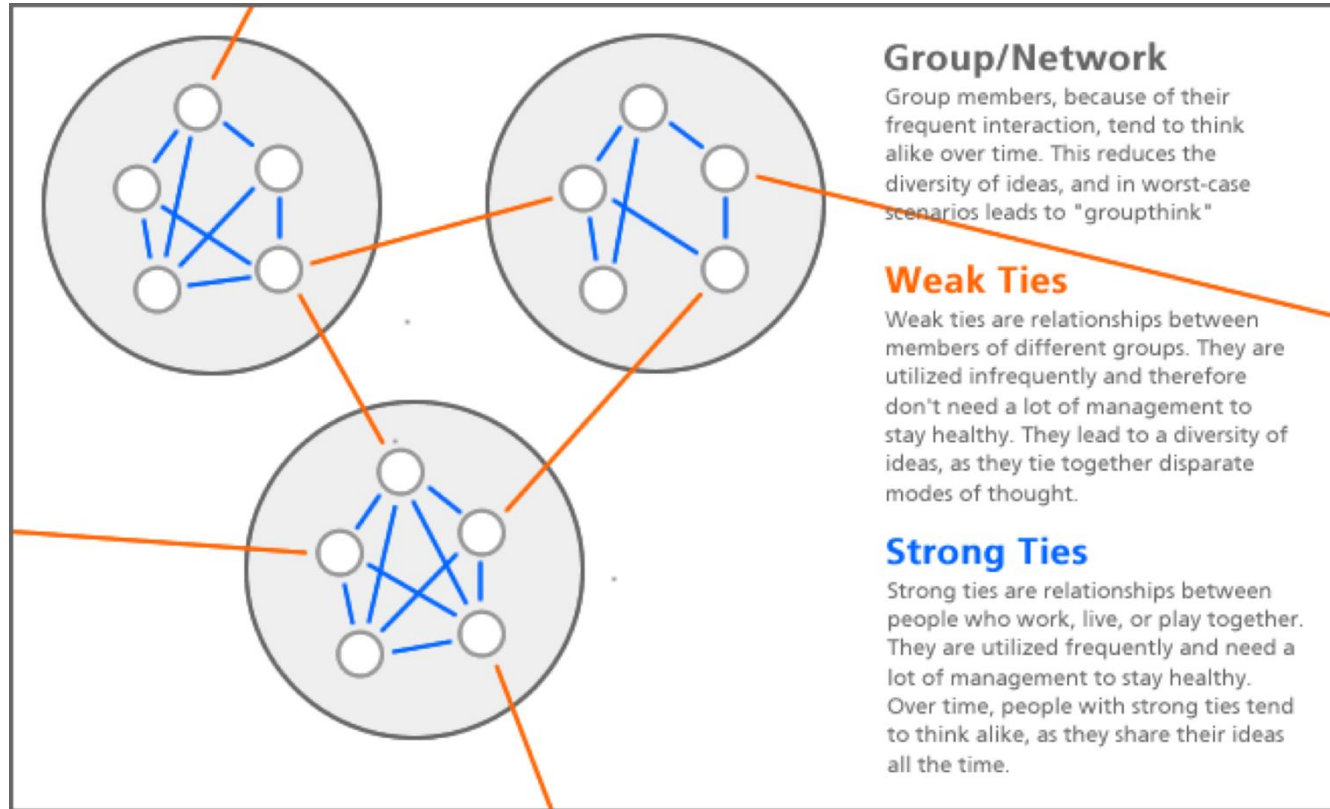


micro
ated
cale
gree
ctly
this
por-
the
itly,
vell-
1 of
ruc-

Los conceptos expuestos en su obra seminal son fundamentales...

Altamente influyente en marketing, sistemas de información y política, ayudando a los investigadores a ofrecer productos que pueden llegar a audiencias poco probables.

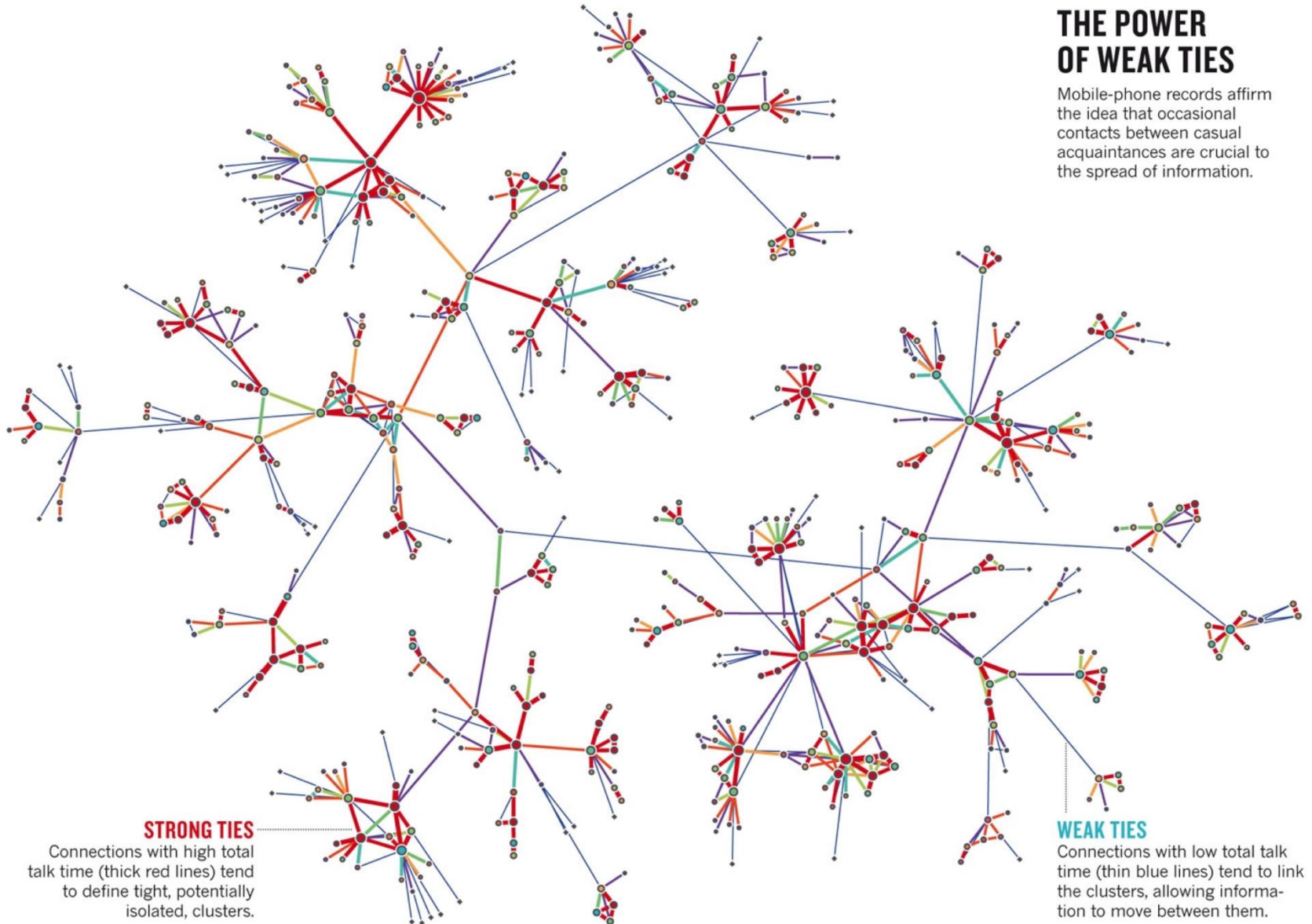
Los lazos fuertes sostienen al grupo; los lazos débiles conectan al grupo con nuevas ideas



<http://bokardo.com/archives/weak-ties-and-diversity-in-social-networks/>

THE POWER OF WEAK TIES

Mobile-phone records affirm the idea that occasional contacts between casual acquaintances are crucial to the spread of information.



STRONG TIES

Connections with high total talk time (thick red lines) tend to define tight, potentially isolated, clusters.

WEAK TIES

Connections with low total talk time (thin blue lines) tend to link the clusters, allowing information to move between them.

A causal test of the strength of weak ties

KARTHIK RAJKUMAR [ID](#), GUILLAUME SAINT-JACQUES [ID](#), IAVOR BOJINOV [ID](#), ERIK BRYNJOLFSSON [ID](#), AND SINAN ARAL [ID](#) [Authors Info & Affiliations](#)

SCIENCE · 15 Sep 2022 · Vol 377, Issue 6612 · pp. 1304-1310 · DOI:10.1126/science.abl4476

↓ 7,997 🗨️ 1



CHECK ACCESS

RELATED PERSPECTIVE

Weak ties, failed tries, and success

BY DASHUN WANG, BRIAN UZZI

The influence of weak associations

Abstract

Supplementary Materials

References and Notes

e Letters (1)

The influence of weak associations

The strength of weak ties is an influential social-scientific theory that stresses the importance of weak associations (e.g., acquaintance versus close friendship) in influencing the transmission of information through social networks. However, causal tests of this paradoxical theory have proved difficult. Rajkumar *et al.* address the question using multiple large-scale, randomized experiments conducted on LinkedIn’s “People You May Know” algorithm, which recommends connections to users (see the Perspective by Wang and Uzzi). The experiments showed that weak ties increase job transmissions, but only to a point, after which there are diminishing marginal returns to tie weakness. The authors show that the weakest ties had the greatest impact on job mobility, whereas the strongest ties had the least. Together, these results help to resolve the apparent “paradox of weak ties” and provide evidence of the strength of weak ties theory. —AMS



Tres métricas centrales en Ciencia de Redes

Distribución de grado:

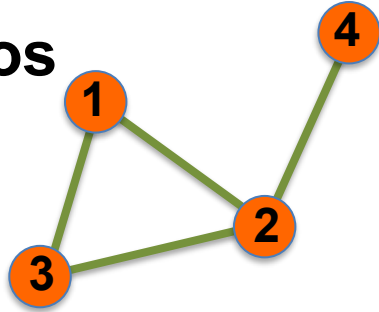
P(k)

Longitud de camino:

$\langle d \rangle$

Coeficiente de Agrupamiento: $C_i = \frac{2e_i}{k_i(k_i - 1)}$

Enlaces no dirigidos



$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

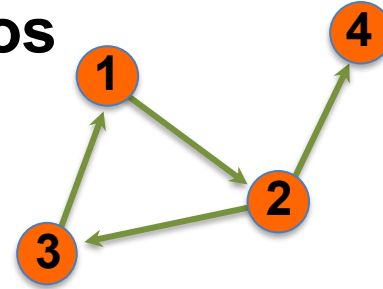
$$A_{ii} = 0$$

$$A_{ij} = A_{ji}$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N A_{ij} \quad \langle k \rangle = \frac{2L}{N}$$

Actor network, protein-protein interactions

Enlaces dirigidos



$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

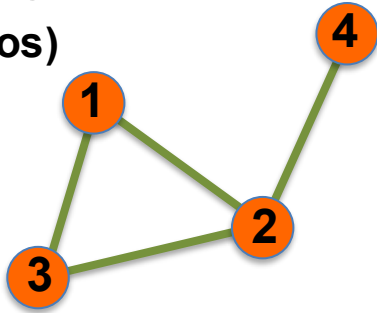
$$A_{ii} = 0$$

$$A_{ij} \neq A_{ji}$$

$$L = \sum_{i,j=1}^N A_{ij} \quad \langle k \rangle = \frac{L}{N}$$

WWW, citation networks

Sin peso (no dirigidos)



$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

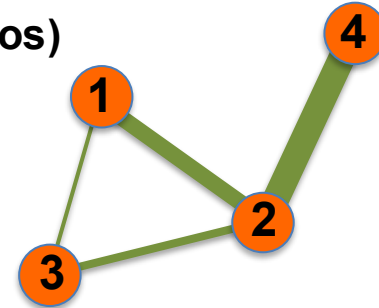
$$A_{ii} = 0$$

$$A_{ij} = A_{ji}$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N A_{ij}$$

$$\langle k \rangle = \frac{2L}{N}$$

Con peso (no dirigidos)



$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

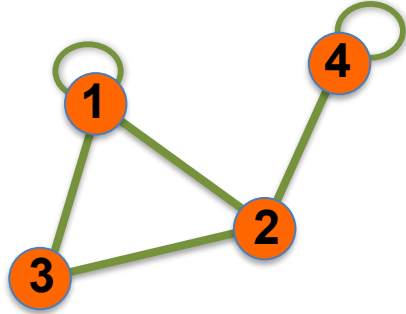
$$A_{ii} = 0$$

$$A_{ij} = A_{ji}$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \text{nonzero}(A_{ij})$$

$$\langle k \rangle = \frac{2L}{N}$$

Auto-interacciones



$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{ii} \neq 0$$

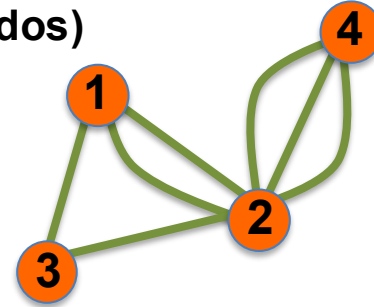
$$A_{ij} = A_{ji}$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N A_{ij} + \sum_{i=1}^N A_{ii} \quad ?$$

Protein interaction network, www

Multi-grafos

(no dirigidos)



$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{ii} = 0$$

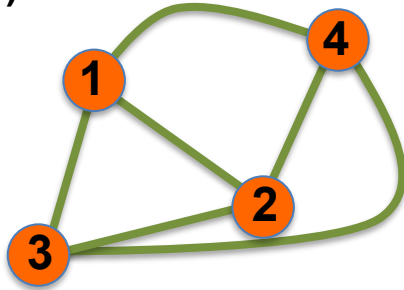
$$A_{ij} = A_{ji}$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \text{nonzero}(A_{ij}) \quad \langle k \rangle = \frac{2L}{N}$$

Social networks, collaboration networks

Red Completa

(no dirigida)

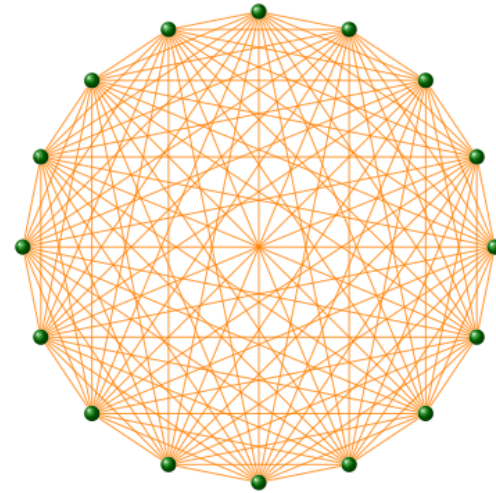


$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{ii} = 0 \qquad A_{i \neq j} = 1$$

$$L = L_{\max} = \frac{N(N-1)}{2} \quad \langle k \rangle = N-1$$

Actor network, protein-protein interactions



Grafología: Las redes reales pueden tener multiples características

WWW > dirigida, multi-grafo, con auto-interacciones

Interacciones de proteínas > no dirigida, sin peso, con auto-interacciones

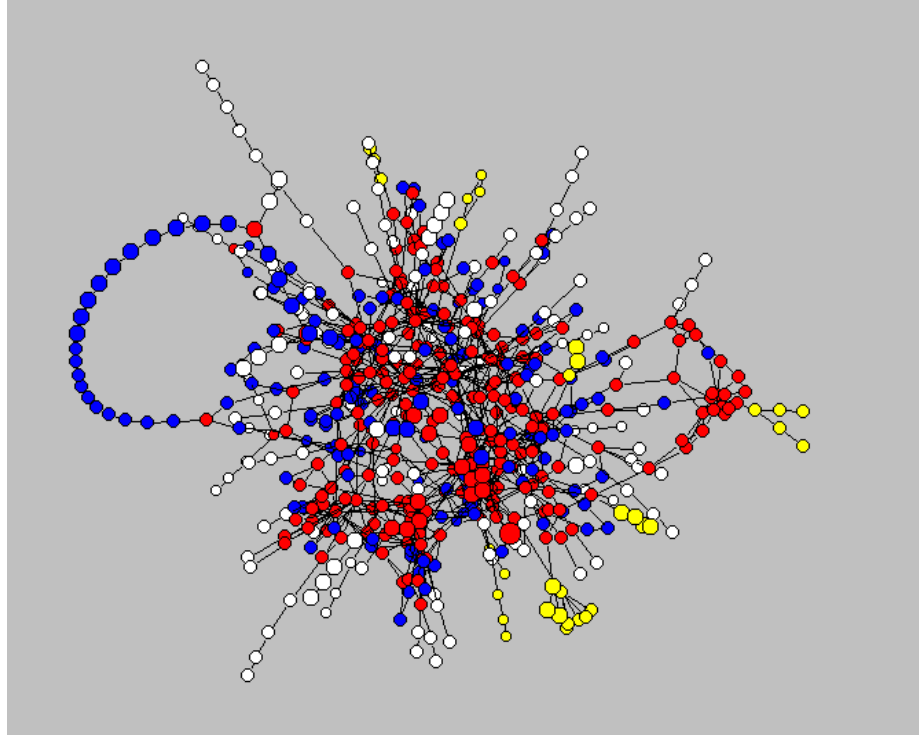
Redes de colaboración > no dirigida, multi-grafo con peso

Llamadas de teléfono > dirigida, con peso

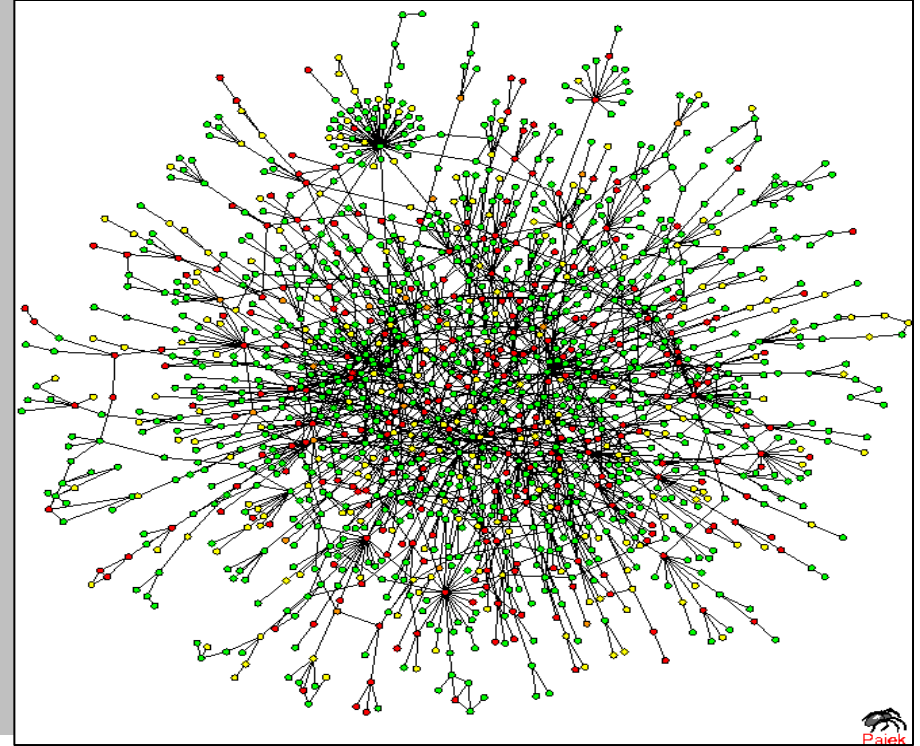
Amistades en Facebook > no dirigida, sin peso

Amistades de Instagram > dirigidas, sin peso

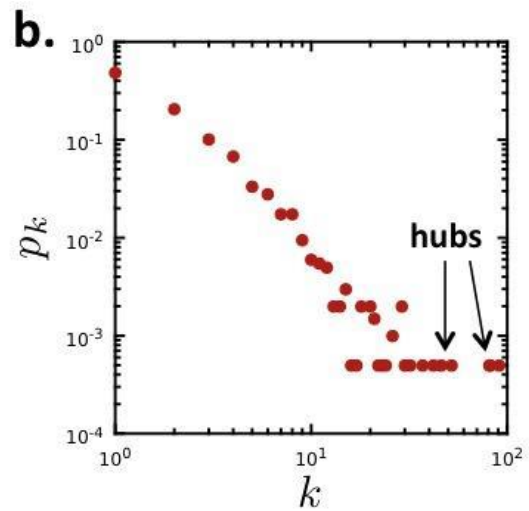
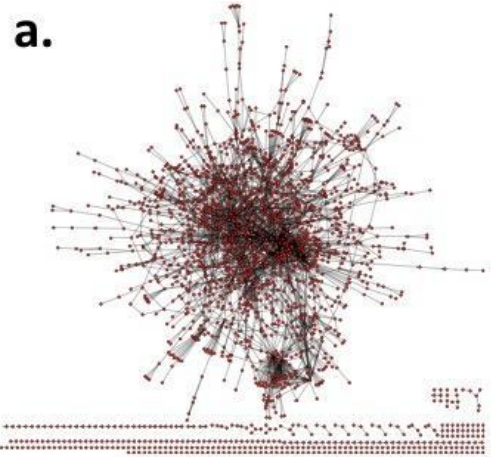
Red metabólica



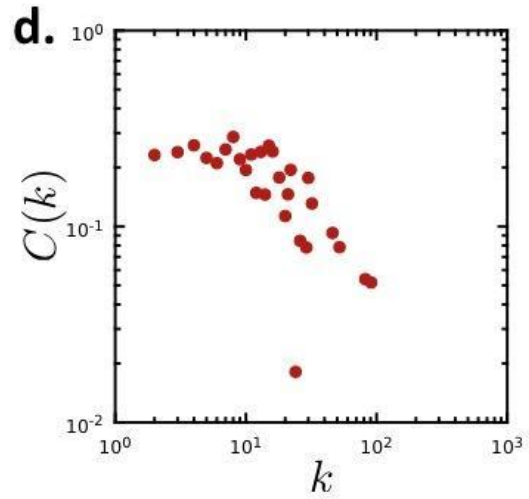
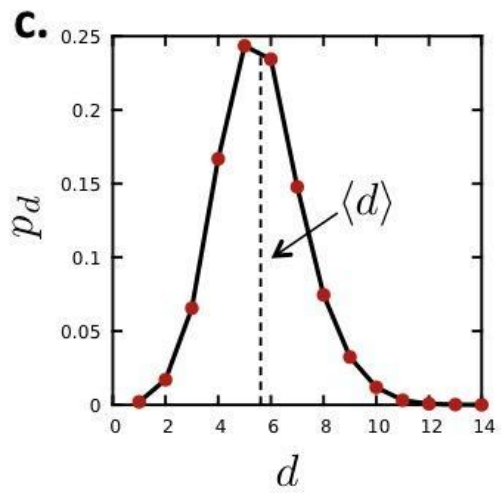
Interacciones de proteínas



Estudio de caso: red de interacciones de proteínas

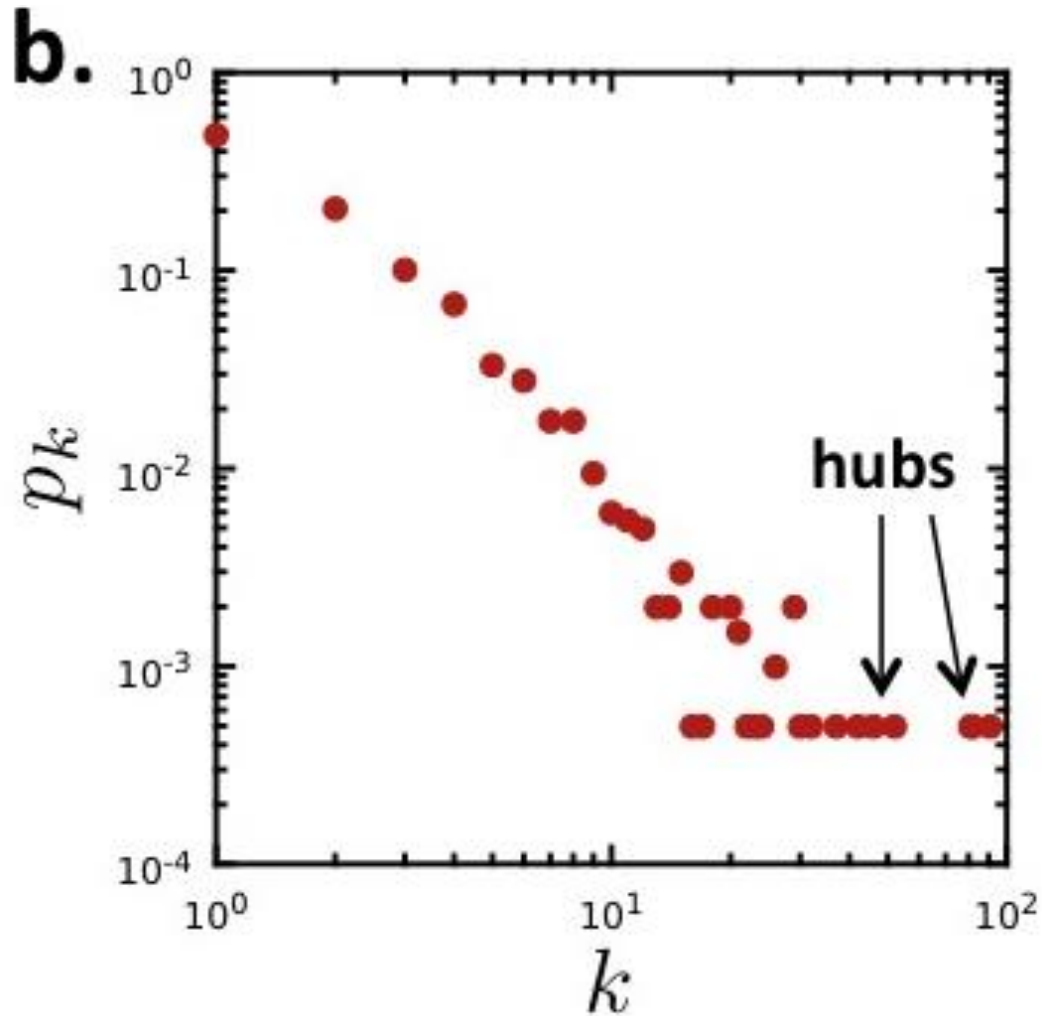


Red no dirigida
N=2,018 las proteínas son nodos
L=2,930 interacciones de union como enlace
Grado promedio $\langle k \rangle = 2.90$.



No conectado: 185 componentes
El componente gigante tiene 1,647 nodos

Estudio de caso: red de interacciones de proteínas

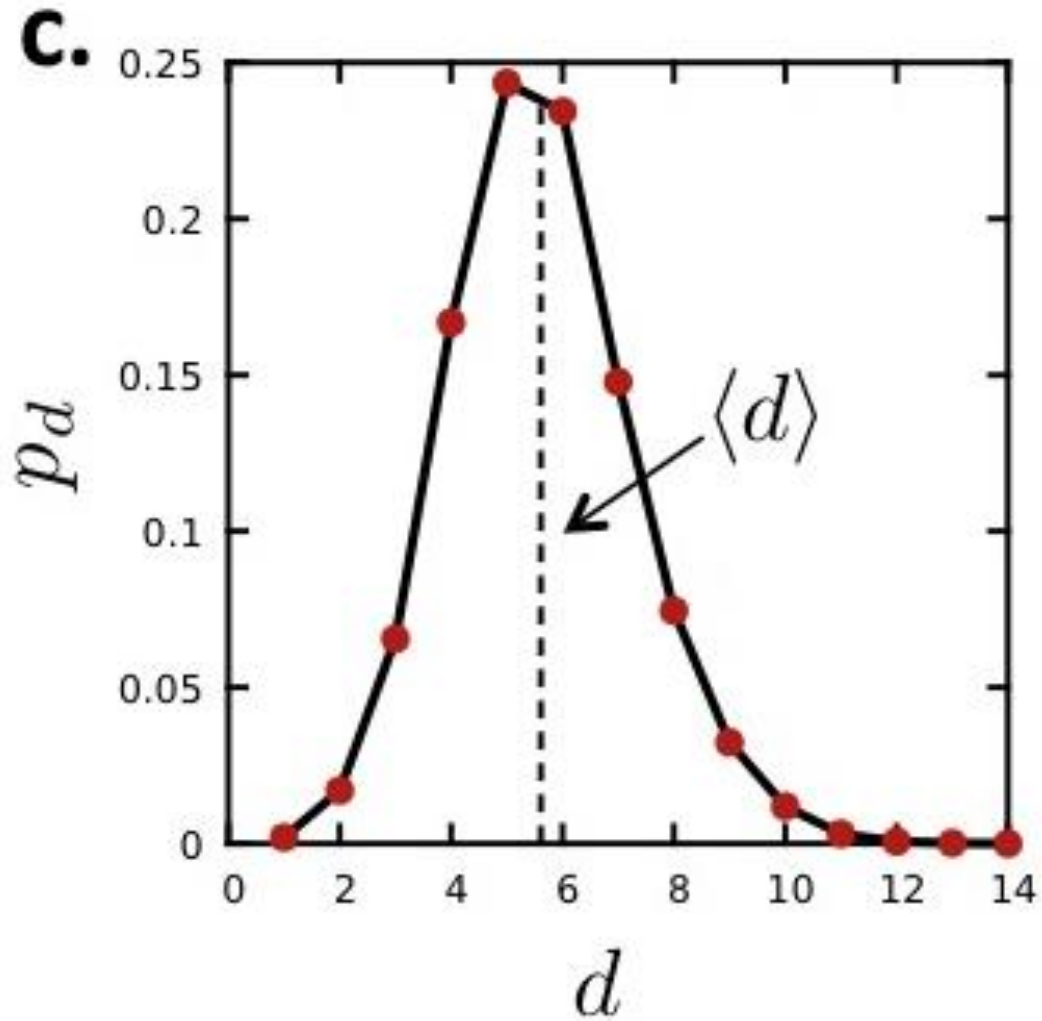


p_k es la probabilidad de que un nodo tenga grado k .

$N_k = \#$ nodos con grado k

$$p_k = N_k / N$$

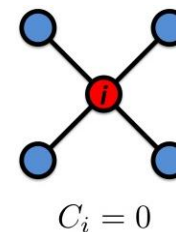
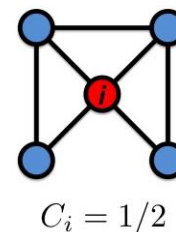
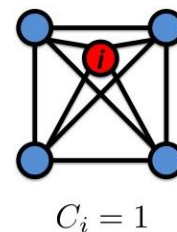
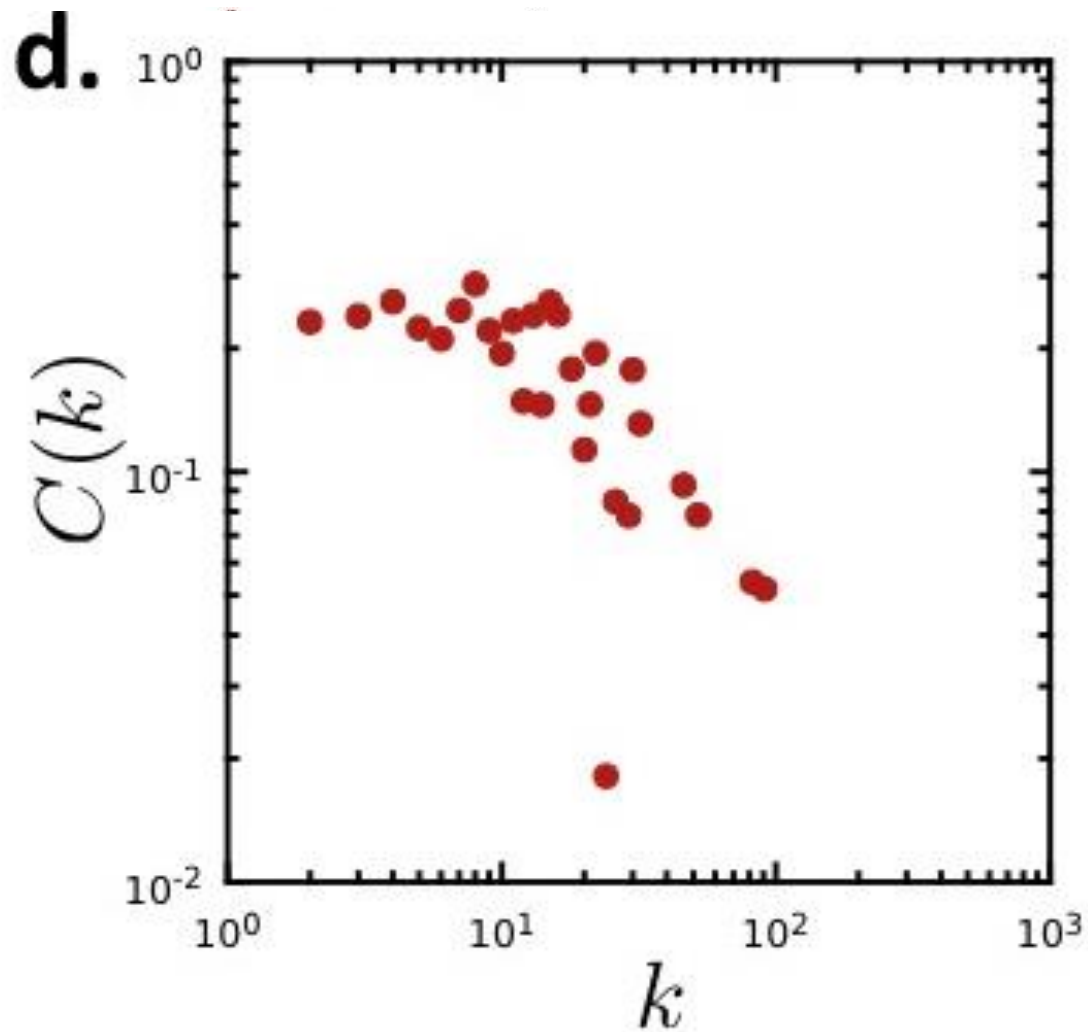
Estudio de caso: red de interacciones de proteínas



$$d_{\max} = 14$$

$$\langle d \rangle = 5.61$$

Estudio de caso: red de interacciones de proteínas



$$C_i = \frac{2e_i}{k_i(k_i - 1)}$$

$$\langle C \rangle = 0.12$$